АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ИНСТИТУТ НАУЧНОЙ ИНФОРМАЦИИ

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ

МАТЕМАТИКА

РЕФЕРАТЫ

3541—4244

*

№ 5 1956

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК СССР
МОСКВА

ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИОННАЯ КОЛЛЕГИЯ
РЕФЕРАТИВНОГО ЖУРНАЛА

Н. В. Агеев, В. В. Алпатов, Г. Д. Афанасьев, В. И. Дикушин, В. Ю. Ломоносов, С. М. Никольский, К. Ф. Огородников, Д. Ю. Панов (председатель редколлегии), В. В. Покшишевский, Л. И. Седов, В. В. Серпинский, Э. В. Шпольский

СОДЕРЖАНИЕ

Общие вопросы 1
История математики. Биографии 2
Основания математики и математическая логика 6
Теория чисел 10
Алгебра 18
Многочлены и линейная алгебра . . . 18
Группы 22
Поля, кольца и структуры 27
Топология 32
Теория функций действительного переменного 36
Теория множеств 37
Приближение функций полиномами и их обобщениями 38
Теория функций комплексного переменного 40
Дифференциальные уравнения 51
Обыкновенные дифференциальные уравнения 51
Уравнения в частных производных . . 57
Приложения к физике, технике и естественным наукам 58
Интегральные уравнения 63
Приложения интегральных уравнений 65
Вариационное исчисление . . . . . —
Анализ (другие вопросы) 65
Числовые ряды 68
Специальные функции 68
Интегральные преобразования и операционное исчисление 69
Приложения общих методов математического анализа 71
Функциональный анализ 72
Теория вероятностей 81
Математическая статистика 87
Теория игр . . . . . —
Применение теоретико-вероятностных и статистических методов в технике . . 89
Геометрия 89
Приложения геометрии . . . . . —
Проективная и начертательная геометрия 91
Алгебраическая геометрия 92
Дифференциальная геометрия трехмерного пространства 94
Геометрия n-мерного пространства. Теория относительности 97
Метрические методы в геометрии 100
Геометрия выпуклых многообразий . . 101
Численные и графические методы 102
Таблицы . . . . . —
Математическая теория электрических цепей 110
Вычислительные машины и математические приборы 111
Использование вычислительных устройств и их элементов в технике 126
Авторский указатель 129

Адрес редакции: Москва Д-219, Балтийский пос., д. 42-Б

РЕФЕРАТИВНЫЙ ЖУРНАЛ
МАТЕМАТИКА

ГЛАВНЫЙ РЕДАКТОР *С. М. Никольский*, УЧЕНЫЙ СЕКРЕТАРЬ *М. К. Керимов*
РЕДАКТОРЫ ОТДЕЛОВ: *П. С. Александров, И. Н. Векуа, А. Н. Колмогоров, Ю. В. Линник, А. И. Маркушевич, В. В. Немыцкий, С. М. Никольский, П. С. Новиков, Д. Ю. Панов, М. М. Постников, С. П. Фиников*

Рефераты 3541—4244 **№ 5** **Май 1956 г.**

ОБЩИЕ ВОПРОСЫ

3541. Заглядывая в будущее науки. Несмеянов А. Н., Газ. «Правда», 1955, 31 декабря, № 365, 2

3542. О состоянии и основных направлениях дальнейшего развития научной деятельности Академии наук Азербайджанской ССР. Вестн. АН СССР, 1955, № 11, 106—108

3543. Десять лет математики в освобожденной Чехословакии. Ярник Войтех (Jarník Vojtěch), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 3, 291—307 (русс.)

Обстоятельный обзор развития научных математических учреждений в Чехословацкой Народной Республике. Приведены подробные сведения о тематике научной деятельности отдельных ученых и школ.

3544. Некоторые итоги и перспективы работы румынских ученых. Сэвулеску Траян, Вестн. АН СССР, 1955, № 11, 60—68

3545. Математический институт (Matematisk institutt), Årsmelding. Univ. Bergen, 1953—1954, 81—82 (норв.)

Краткое сообщение о деятельности Математического института при университете в Бергене за 1953—1954 г. Приводятся сведения о докладах и публикациях отдельных сотрудников института.

3546. Математический институт (Университет в Грейфсвальде). Ринов (Mathematisches Institut. Rinow W.), Wiss. Z. E. M. Arndt-Univ.-Greifswald, 1954—1955, 4, № 3—4, 403—404 (нем.)

Даны краткие сведения о деятельности Института, а также о научных работах и докладах отдельных сотрудников. Приводится перечень трудов, опубликованных сотрудниками Института в 1954 г.

3547. Совещание по теории вероятностей и ее применениям. (От редакции). Вестн. Ленингр. ун-та, 1955, № 11, 43—45

С 30 мая по 4 июня 1955 г. в Ленинграде состоялось совещание по теории вероятностей и ее применениям. На совещании были прочитаны обзорные доклады: А. Н. Колмогоров, Понятие информации, способы измерения «количества информации» и основы шенноновской теории передачи информации. Е. Б. Дынкин, Новые аналитические методы в теории марковских процессов. Н. Н. Воробьев, Контролируемые процессы и теория игр. И. П. Кубилюс, Вероятностные методы в теории чисел. И. М. Гельфанд, А. М. Яглом, Методы теории случайных процессов в квантовой физике. Ю. В. Прохоров, Предельные теоремы теории вероятностей и функциональный анализ. Дается список 38 докладов и сообщений, доложенных на совещании. Л. А. Стебакова

3548. II Конгресс математиков и физиков Югославии (II конгрес математичара и физичара Југославије), Настава матем. и физ., 1954, 3, № 3—4, 115—116 (серб.)

3549. Национальная академия наук. Резюме докладов, представленных осеннему собранию, 2—4 ноября 1955 г., состоявшемуся в Технологическом институте в Пасадене, Калифорния (National Academy of Sciences. Abstracts of papers presented at the autumn meeting, 2—4 November 1955, California Institute of technology, Pasadena), Science, 1955, **122**, № 3175, 873—882 (англ.)

3550. Польская аналитическая библиография (Polska bibliografja analityczna. Matematyka. 1955, **1**, № 1, 83 str.) (польск.)

Под этим названием начал выходить в свет реферативный журнал под редакцией Р. Сикорского и Е. Расёвой, ставящий своей целью реферирование на польском языке научных статей по математике, публикуемых в польских математических журналах. Этот выпуск содержит 100 рефератов статей, опубликованных в 1952 и 1953 гг. в следующих журналах: Ann. Soc. polon. math. (Roczn. Polsk. towarz. mat.); Bull. Acad. Polon. Sci.; Fundam. math.; Rozpr. mat.; Studia math.; Zastosow. mat.

Рефераты распределены по отделам (история, основания и логика, теория чисел и т. д.). Имеется отдел приложений математики с подразделами: 1) численные и графические методы и 2) математические таблицы. Журнал хорошо оформлен, рефераты выполнены на высоком научном уровне польскими математиками, среди которых мы находим ряд крупных ученых. Имеется, повидимому, в виду охват реферированием литературы, вышедшей в свет, начиная с 1952 года.

Многие рефераты идентичны соответствующим рефератам РЖМат (если не считать их языка), что соответствует соглашению между Академией наук СССР и Польской академией наук. С. М. Никольский

3551. Картина современной математики. Кёте (Das Bild der heutigen Mathematik. Köthe G.), Experientia, 1955, **11**, № 7, 249—254 (нем.; рез. англ.)

Речь, произнесенная 18 ноября 1954 г. в Майнцском университете (Германия). Проводится сравнение уровня преподавания математики в Германии и современного состояния этой науки. Отмечается, что средняя школа дает учащимся знание основ математики, сложившихся к XVIII в., высшая — классической математики XIX в. Основания последней подверглись коренным преобразованиям в связи с обнаружением в конце XIX в. парадоксов теории множеств. В обзоре попыток преобразования наибольшее внимание уде-

ляется аксиоматическому методу, ведущему свое происхождение от Д. Гильберта. Указывается, что аксиоматический метод в XX в. привел к новой структуре математики; основными дисциплинами, по мнению автора, теперь являются современная алгебра, теория упорядоченных множеств и топология. Сведение любой математической идеи к немногим основным понятиям должно, по мысли автора, универсальным образом обеспечить единство математики, охватывающей как классические, так и современные ее концепции.
К. А. Рыбников

3552. А. И. Герцен о математике. Майстров Л. Е. В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 8, М., Гостехиздат, 1955, 481—488

Из сочинений А. И. Герцена выбраны и приведены его высказывания о некоторых философских вопросах математики. К. А. Рыбников

3553. К обозначению пространственных, временных и комплексных величин. Рейхардт (Zur Kennzeichnung räumlicher, zeithängiger und komplexer Größen. Reichardt Walter), Wiss. Z. Techn. Hochschule Dresden, 1954—1955, 4, № 5, 873—879 (нем.)

3554. Заключительное сообщение о ходе и результатах четвертого года математической олимпиады (Závěrečná zpráva o průběhu a výsledních. IV. Ročníku matematické olympiady), Věst. Českosl. akad. ved, 1955, 64, № 7—8, 332—335 (чеш.)

3555. Преподавание математики, физики и астрономии в университетах и высших школах. Сайович (Nastava matematike, fizike i astronomije na univerzitetima i višim skolama. Sajovic L.), Настава матем. и физ., 1954, 3, № 3—4, 183—206 (серб.; рез. франц.)

3556. Организация математического образования в США. Фер (The administration of mathematics education in the United States of America. Fehr Howard F.), School Sci. and Math., 1955, 55, № 5, 340—344 (англ.)

Доклад на Международном математическом конгрессе в Амстердаме (1954 г.) об организации и системе управления математическим образованием в школах США. Приводятся также некоторые данные о подготовке учителей и методической литературе. В. И. Левин

3557 К. Первый год математической олимпиады. Вышин, Зелинка (První ročník matematické olympiady. Zpráva o řešeni úloh ze soutěžě konané ve školním roce 1951/1952. Sest. Vyšín Jan, Zelinka Rudolf. Ped. aktual., 1952 (1953), № 34, 81 str.) (чеш.)

3558 К. Третий год математической олимпиады. Зелинка (Třetí ročník matematické olympiady. Zpráva a řešení úloh ze soutěže konané ve školním roce 1953—1954. Zprac. Zelinka Rudolf. Ped. aktual., 1955, № 64, 139 str.) (чеш.)

В брошюре излагаются материалы третьей ежегодной математической олимпиады, состоявшейся в Чехословакии в 1953—1954 уч. году. Математическая олимпиада — это общегосударственное состязание, которое ежегодно устраивается для школьников 8—11 классов 11-летних средних школ (и некоторых специальных средних учебных заведений) Министерством просвещения совместно с Математическим институтом Чехословацкой АН и Центральным комитетом Чехословацкого союза молодежи. Ученики 11-х классов участвуют в трех турах, остальные участники — только в двух турах. Состязание первого тура носит учебный характер; второй и третий туры подобны заключительным письменным школьным работам. Министерство просвещения ежегодно награждает победителей олимпиады ценными премиями. В третьей математической олимпиаде участвовало около 10 000 учеников из всех районов Республики (из них 8 000 учеников 8-го класса). Примеры были выбраны так, чтобы они относились к программе соответствующего класса. Брошюра содержит подробные решения 84 задач, предложенных на олимпиаде. Jiří Sedláček

3559 К. Математические труды. Мемуары и заметки. Т. I. 1881—1892. Вольтерра (Opere matematiche. Memorie e note. Vol. I. 1881—1892. Volterra Vito. Accademia Nazionale dei Lincei, Roma, 1954, XXXIII + 604 pp. (1 plate) 8000 lire) Math. Revs, 1955, 16, № 1, 2 (итал.)

3560 К. Сборник задач по высшей математике. Гюнтер, Кузьмин (Felsőbb matematikai példatár. 1. Egyetemi tankönyv. Ford. oroszból. 3. kiad. Giunter N. M., Kuzmin R. O., Budapest, Tankönyvkiado, 1954, 238 str., 26, 20 Ft.), Magyar nemzeti bibliogr., 1955, № 1, 7 (венг.)

Перевод с русского.

3561 К. Элементарная арифметика. Груша (Elementární aritmetika. Hruša Karel. Přirodovědecké vydavatelství, Praha, 1953, 300 str.) (чеш.)

Автор — доцент по математике в Педагогическом институте в Праге и книга его представляет собой расширенное изложение его лекций. Хотя в ней не предполагается никаких предварительных знаний, учебник этот предъявляет определенные требования к способности логического умозаключения, так что эту книгу не может изучать, например, ученик одиннадцатилетки, который не приобрел еще определенных навыков в умозаключениях. Книга разделена на 10 глав и каждая из них дополнена рядом упражнений.

После пропедевтического введения понятия множества книга знакомит с натуральным числом, прежде всего как с порядковым, а потом как с количественным числом конечного множества. Подробно излагается переход от натуральных чисел к целым и рациональным; при этом читатель знакомится с понятиями кольца, области целостности и тела. Действительные числа вводятся методом сечения. Строгим является также и определение комплексных чисел, для которых дается и геометрическая интерпретация. Обобщение понятия числа доведено до гиперкомплексных систем.

Автор использовал ряд известных источников. Из советских: Энциклопедия элементарной математики. Т. I, Гостехиздат, М.—Л., 1951; Александров П. С., Введение в общую теорию множеств и функций, Гостехиздат, М.—Л., 1948; Натансон И. П., Теория функций вещественной переменной, Гостехиздат, М.—Л., 1950. Jiří Sedláček

3562 К. Три диалога о пространстве, времени и причинности. Яффе (Drei Dialoge über Raum, Zeit und Kausalität. Jaffé George. Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer-Verlag, 1954, 211 S. 9.60 DM.), Math. Revs, 1954, 15, № 6, 494 (нем.)

3563 Д. Неравенства в курсе алгебры средней школы. Борчугова З. Г. Автореф. дисс. канд. пед. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

ИСТОРИЯ МАТЕМАТИКИ. БИОГРАФИИ

3564. Влияние геометрии Бойаи — Лобачевского на развитие аксиоматического метода. Кальмар (L'influence de la géométrie de Bolyai — Lobatchevsky sur le développement de la méthode axiomatique. Kalmár L.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, Suppl. 117—126 (франц.; рез. русс.)

Автор развивает мысль, что исследования Лобачевского и Бойаи явились толчком для развития аксиоматического метода. В частности, наличие двух различных геометрических систем, свободных от логических противоречий и отличающихся в началах лишь аксиомой параллельности, привело к разработке вопросов независимости аксиом. Сюда же примыкают исследования о полноте систем аксиом, их категоричности и др. Б. В. Гнеденко

3565. Некоторые аспекты истории математики по «Лекциям о геометрических построениях» Анри Лебега. Феликс (Quelques aspects de l'histoire des mathématiques d'après les Leçons sur les constructions géométriques d'Henri Lebesgue. Félix Lucienne), Rev. gén. sci. pures et appl., 1953, 60, № 9—10, 265—276 (франц.)

Приводятся и комментируются выдержки из работ Лебега, особенно из его «Лекций о геометрических построениях», в которых рассматриваются различные вопросы истории развития геометрических построений (конструктивная мощность инструментов и др.). Подчеркивается стремление Лебега привлекать исторический материал, чтобы показать, как возникают те или иные задачи, в чем заключаются трудности в их решении и т. д. В. Ф. Рогаченко

3566. Интеграционные методы Архимеда. Дейкстерхёйс (Die Integrationsmethoden von Archimedes. Dijksterhuis E. J.), Nord. mat. tidskr., 1954, 2, № 1—2, 5—23 (нем.)

Выдержка из доклада на заседании Общества истории точных наук в Копенгагене (10 марта 1953). Отмечается, что греческие математики V—IV вв. до н. э. пришли к открытию иррациональных чисел и понятию бесконечности. Преодоление возникших в результате этого открытия трудностей было делом гениального математика Евдокса Книдского (первая половина IV в. до н. э.), автора теории отношений несоизмеримых величин и метода исчерпания, базирующегося на ясном представлении о неисчерпаемости бесконечности. В результате строгой трактовки бесконечных процессов появилась необходимость прибегать к непрямым доказательствам. Эти доказательства у Архимеда имеют троякую форму: метод сближения в двух разновидностях с применением разности или отношения и метод приближения.

Метод сближения (Kompressionsmethode) у Архимеда заключается в следующем. Пусть Σ будет заданная для определения величина. Она заключается между двумя монотонно возрастающей и убывающей последовательностями величин I_n и C_n, $I_n < \Sigma < C_n$. Доказывается: а) (в разновидности с применением разности) что разность $C_n - I_n$ при подходящем выборе n может быть сделана меньше любой заданной величины; б) (в разновидности с применением отношения) что отношение C_n к I_n при подходящем выборе n может быть сделано меньше отношения большей из двух произвольно выбранных величин к меньшей. Само доказательство заключается в том, что определяется некоторая величина K при любом n, удовлетворяющая неравенству $I_n < K < C_n$. После этого устанавливается, посредством рассуждения от противного, что определяемая величина Σ равняется K. Указанный метод применен в форме с разностью в произведениях «Измерение круга», «О коноидах и сфероидах», «О спиралях», а в форме с отношением — в произведении «О шаре и цилиндре».

Метод приближения (Approximationsmethode) заключается в следующем. Для определяемой величины Σ составляют приближенное выражение в виде суммы $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ n членов такой последовательности $a_1, a_2, \ldots$, чтобы разность $\Sigma - S_n$ при подходящем выборе n могла быть сделана меньше произвольно выбранной величины. После этого определяют такую величину K, чтобы (при любом n) имело место равенство $S_n + R = K$, где $R < a_n$, и высказывается утверждение, что $\Sigma = K$. Этот метод применяется в «Квадратуре параболы».

В качестве примеров применения обоих методов разбирается определение поверхности и объема шара, а также площади параболического сегмента как в своей окончательной форме, так и в первоначальном виде, изложенном в «Эфодике». В заключение автор указывает разницу в формулировке основной аксиомы у Евдокса и Архимеда. И. Н. Веселовский

3567. О достижениях китайских ученых в области математики. Юшкевич А. П. В сб.: Историко-математические исследования, вып. 8, М., Гостехиздат, 1955, 539—572. В сб.: Из истории науки и техники Китая, М., Изд-во АН СССР, 1955, 130—159

Дается характеристика богатого по содержанию древнейшего математического трактата «Математика в девяти отделах» (II в. до н. э). В нем впервые в истории науки дан единообразный алгоритм для решения систем n линейных уравнений с n неизвестными ($n = 2, 3, 4, 5$), идея которого среди европейских математиков была высказана лишь в конце XVII в. Лейбницем, положившим начало современной теории определителей. В связи с формальным распространением вышеуказанного алгоритма, применявшегося сначала к более частным случаям, здесь также впервые используются отрицательные количества. Текст правила к задаче из 8-го раздела «Математики в девяти отделах», где речь идет о стоимостях разного рода скота, подтверждает предположение автора о толковании отрицательных количеств, как недостатка денег. Именно: фраза 不足錢負 означает «недостаток цяней отрицателен» (цянь — монета в древнем Китае). В том же трактате содержатся извлечение квадратных и кубических корней на основе разложения квадратного и кубического бинома и применение квадратных уравнений к задачам геометрии.

Рассмотрен способ Горнера алгебраических уравнений высших степеней, который применялся уже в работах Ван Цзяо-туна (VII в. н. э.), а в работах Цинь Цзю-шао (XIII в.) достиг своего полного развития.

Отмечаются и другие, неалгебраические достижения китайских математиков: задача из теоретико-числовой области, решение системы сравнений первой степени, помещенная в трактате Сунь-цзы (не позднее III в. н. э.); суммирование рядов (работа Шэнь Ко (XI в.), чем особенно увлекались китайские математики времен Сунской и Юаньской династий (X—XIV вв.); вычисление значений π, где особенно знаменит Цзу Чун-чжи (V в. н. э.), вычисливший значение π с 6 верными десятичными знаками и давший для π два значения подходящих дробей $\frac{22}{7}$ и $\frac{355}{113}$ (более точное значение π было получено лишь через 1000 лет Джемшидом Гиясэддином ал-Каши); задача Лю Хуэйя (III в. н. э.) из области практической геометрии, где определяется расстояние до недосягаемого предмета и его размеры. Ранее возникновение задач, подобных последней, подчеркивает характерную для китайской математики близость к практике. Отмечается несостоятельность взглядов некоторых историков математики, считавших древнюю китайскую математику эмпирической и несамостоятельной. Связи Китая в древности с другими странами еще плохо изучены, но уже сейчас можно утверждать с несомненностью, что китайская математика указанного периода в целом

развивалась в тесной связи со странами Востока (с Индией, с VII—VIII вв. с государствами Ближнего Востока, с государствами, расположенными на территории нынешних среднеазиатских республик Советского Союза, Ирана) и так же как вся математика Востока носила вычислительно-алгоритмический характер. Э. И. Березкина

3568. Арабские формы цифр. Ирани (Arabic numeral forms. Irani Rida A. K.), Centaurus, 1955, 4, № 1, 1—12 (англ.)

Изучаются формы десятичных («индийских») и шестидесятиричных цифр («цифр джумала») в арабоязычных рукописях (ср. А. П. Юшкевич и Б. А. Розенфельд. Примечания к математическим трактатам Джемшида Гиясэддина Каши, Историко-матем. исследования, М., 1954, № 7, стр. 381 и 397). Исследование проводится на основании сравнения 11 математических и астрономических рукописей XI—XVIII вв. Сравнивая шестидесятиричный нуль (ср. там же, стр. 398) в этих рукописях с таким же нулем в греческих астрономических папирусах I—V вв., автор показывает, что форма этого нуля заимствована арабоязычными математиками у греков. Б. А. Розенфельд

3569. Математики-практики в Англии Тюдоров и Стюартов. Тейлор (The mathematical practitioners of Tudor and Stuart England. Taylor E. G. R.), Internat. Hydrogr. Rev., 1955, 32, № 1, 203—205 (англ.)

Сообщение о книге того же заглавия, изданной Навигационным институтом Кембриджского университета. В книге приведен список учителей практической математики и мастеров математических приборов за период от 1485 г. по 1714 г., когда университеты не давали практической подготовки навигаторам, землемерам, пушечных дел мастерам, часовщикам и другим практическим работникам. В книге даны биографические и библиографические сведения о 400 авторах, среди которых имеются и более широко известные: Дий, Аутрид, Гук, Флемстид, Пелль, Хариот, Райт, Галлей. И. Я. Депман

3570. «Опыт о конических сечениях» Паскаля (L'«Essay pour les coniques» de Pascal), Rev. histoire sci., 1955, 8, № 1, 1—18 (франц.)

Воспроизводится текст первого сочинения Паскаля, обстоятельно прокомментированный Татоном Р. (Taton René). Тексту предпослано введение того же автора, в котором приведены сведения о возникновении этого сочинения. Работа Паскаля была издана в виде афиши формата 35 × 43 *см*, на одной стороне листа в количестве 50 экземпляров, из которых сохранились лишь два экземпляра. Это был первый набросок большого сочинения: Conicorum opus completum, над которым Паскаль работал на протяжении почти всей жизни и которое не было издано, а в настоящее время утеряно. Из анализа данного сочинения комментатор пытается делать заключение о содержании утерянного. Я. П. Бланк

3571. Об одной заметке Лейбница по вопросам теории вероятностей. Бирман (Über eine Studie von G. W. Leibniz zu Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Biermann Kurt-R.), Forsch. und Fortschr., 1955, 29, № 4, 110—113 (нем.)

Сообщается о попытках Лейбница решения задачи о разделении ставки между двумя игроками (задача кавалера де-Мере), содержащихся в неопубликованной рукописи начала 1676 г. Хотя решение не было доведено Лейбницем до конца и даже для своего времени не было новым по методу, автор считает изучение рукописи интересным, так как оно позволяет вскрыть методику работы Лейбница. Б. В. Гнеденко

3572. Содружество ученых русского и украинского народов в развитии математики. Мирьякан Г. М., Киро С. Н., Тр. Одесск. ун-та (Юбил. сб.), Киев, Изд-во ун-та, 1954, 187—201

Кратко охарактеризованы памятники математической литературы Киевской и Московской Руси до XVII в. Культурные связи в 1-й половине XVIII в. иллюстрированы на материале, относящемся к истории Киевской и Московской академий. Приводимая на стр. 190—191 цитата из Феофана Прокоповича, однако, осталась без интерпретации и находится в противоречии с тем, что сами авторы говорили раньше о математической культуре древней Руси. На стр. 191 выдвинуто спорное положение о том, что распространению «передовых, революционных идей М. В. Ломоносова в естествознании» содействовал философ Григорий Сковорода. Ближе и детальнее исследованы украино-русские отношения, начиная со времени основания Московского (1755) и Харьковского (1805) университетов. Оттенена роль украинцев М. В. Остроградского и В. Я. Буняковского в создании Петербургской математической школы и обратно — содействие Петербургской школы дальнейшему развитию математики на Украине, особенно в Харькове и Киеве (А. М. Ляпунов, Д. А. Граве и др.). Заключительная часть статьи посвящена успехам математики в советский период, когда достижения украинских математиков стали «неотделимы от достижений всей советской математики» в целом (стр. 196). Общность развиваемых направлений ближе прослежена на истории развития теории вероятностей. В. П. Зубов

3573. О научном наследии Леонарда Эйлера в области дифференциальных уравнений. Симонов Н. И. В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 7, М., Гостехиздат, 1954, 513—595

Излагая содержание ряда важнейших работ Эйлера по дифференциальным уравнениям, автор показывает их научную глубину. Он справедливо возражает против довольно распространенного мнения, что Эйлер будто бы был лишь искусным вычислителем. Автор и референт в опубликованной в том же номере «Историко-математических исследований» статье приходят независимо друг от друга к аналогичным выводам. Ф. И. Франкль

3574. Вольфрам, Вега, Тиле. Арчибальд (Wolfram, Vega, Thiele. Archibald R. C.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, 9, № 49, 21 (англ.)

Исправления некоторых неточностей в статье автора в т. 4 (1950) того же издания. И. Я. Депман

3575. Исторические этюды. XXX. Пространственные кривые и спрямляемые поверхности. Врис (Historische studiën. Over ruimtekrommen en regeloppervlakken. Vries Hk. de), Nieuw tijdschr. wiskunde, 1954, 42, № 2, 153—160; 161—164, 209—217 (голл.)

30-й из серии исторических очерков о кривых линиях и поверхностях, с общим эпиграфом «История науки есть сама наука» и заключительной фразой: «Если и не хватит сил, однако уже намерение похвально». Очерк охватывает историю вопроса за XVIII и XIX вв., давая сводку достижений Парана (Parent), Паскаля, Клеро, Эйлера, Монжа, Менье, Сильвестера, Плюккера, Шаля, Кейли и др. И. Я. Депман

3576. Из истории преподавания математики в Московском университете (1804—1860 гг.). Лихолетов И. И., Яновская С. А. В сб.: Историко-матем. исследования, вып. 8, М., Гостехиздат, 1955, 127—480

Исследование периода, начинающегося с организации факультета «Физических и математических наук» и кафедры «Чистой математики» и заканчивающегося организацией Московского математического общества и его научного журнала «Математический сбор-

ник». В работе нашли отражение очерки жизни и научно-педагогической деятельности профессоров и преподавателей, анализ русских и иностранных учебных руководств, многочисленные материалы об организации преподавания. В статью вошли также некоторые сведения из истории аналитической геометрии и сравнительные данные о преподавании математики в других университетах.

Отрезок времени 1804—1860 гг. авторы делят на два периода: 1804—1834 гг., когда математика занимала положение вспомогательной учебной дисциплины, и 1834—1860 гг., когда математика вошла в число ведущих дисциплин, ее преподавание достигло уровня передовой науки своего времени, а в университете началась систематическая подготовка специалистов-математиков. Подвергнуты анализу новые документы и материалы; изложение более полное и обстоятельное, нежели в других работах по данному вопросу (А. П. Юшкевич, «Математика в Московском университете за первые сто лет его существования», сб. Историко-математические исследования, вып. 1, 1948, кандидатская диссертация В. Е. Прудникова «Первые сто лет преподавания математики в Московском университете», 1948). К. А. Рыбников

3577. Симон Стевин. Пахарес (Simon Stevin. Pajares E.), Gac. mat., 1955, **7**, № 1—2, 3—6 (исп.)

Краткий очерк о выдающемся голландском ученом Симоне Стевине (1548—1620).

3578. Является ли Якобо Родригес Перейра испанским первоизобретателем? Кинтас-Кастаньс (Jacobo Rodriguez Pereira jun precursor español? Quintas Castañs V.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1954, **3**, № 8, 29—32 (исп.)

Сообщается, что испанец Перейра (1715—1780), известный своей системой обучения глухонемых, изобрел две счетные машины для своих педагогических целей, вторая — более усовершенствованная по сравнению с паскалевой — была приобретена банкиром и министром Неккером. И. Я. Депман

3579. Дидро и квадратура круга. Майер (Diderot et la quadrature du cercle. Mayer J.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1955, **62**, № 5—6, 132—138 (франц.)

Указывается, что Дидро занимался задачей о квадратуре круга, хотя ничего не печатал о ней.

И. Я. Депман

3580. Столетие со дня смерти К. Ф. Гаусса. Колибиарова (100 rokov od smrti K. F. Gaussa. Kolibiarová Blanka), Mat. ve škole, 1955, **5**, № 9, 567—571 (словац.)

3581. Габрио Пьола (1794—1850). **Хадраке** (Gabrio Piola (1794—1850). Jadraque Valentín Martín), Gac. mat., 1955, **7**, № 3—4, 57—59 (исп.)

3582. Жизнь и труды Н. И. Лобачевского. Картеси (La vie et les oeuvres de N. I. Lobatchevsky. Kárteszi F.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, Suppl., 127—136 (франц.; рез. русс.)

Статья содержит важнейшие биографические данные о Н. И. Лобачевском, его трудах по неевклидовой геометрии и (кратко) о его исследованиях по теории комплексных чисел и теории функций. Основное содержание статьи — сравнение жизни и творчества Н. И. Лобачевского и Я. Бойаи. Прослеживая общность, существующую в отношении как выбора, так и решения научных проблем, автор вместе с тем оттеняет характерное для обоих ученых материалистическое понимание природы математики.

В. П. Зубов

3583. К избранию Понселе членом-корреспондентом С. Петербургской Академии наук. Т. П. Кравец, Изв. АН СССР, Отд. техн. н., 1955, № 4, 120—130

Публикуются документы, относящиеся к избранию (29 декабря 1857 г.), а также предисловия к «Приложениям анализа к геометрии» Понселе, содержащие интересные подробности о пребывании Понселе в русском плену. И. Н. Веселовский

3584. Вильям Гамильтон (Sir William Hamilton (1805—1865), Nature, 1955, **176**, № 4474, 191—192 (франц.)

3585. Давид Биренс де Хан. Шрек (David Bierens de Haan. Schrek D. J. E.), Scripta Math., 1955, **21**, № 1, 31—41 (англ.)

Краткая биография и сведения о научной деятельности голландского математика Давида Биренса де Хана (1822—1895), известного своими «Таблицами определенных интегралов» и исследованиями по истории математики, в частности — голландской. Приведены сокращенный список его трудов и библиография работ, посвященных де Хану.

Л. А. Стебакова

3586. Жорж Валирон. 1884—1955. Булиган (Georges Valiron. 1884—1955. Bouligand G.), Rev. gén. sci. pures et appl., 1955, **62**, № 3—4, 67—68 (франц.)

Некролог известного французского математика Валирона.

3587. Математическое творчество Кальмара. Петер (Kalmár László matematikai munkássága. Péter Rózsa), Mat. lapok, 1955, **6**, № 2—3, 138—150 (венг.)

3588. Николай Митрофанович Крылов. Укр. матем. ж., 1955, **7**, № 3, 347—349

Некролог выдающегося советского математика Николая Митрофановича Крылова (1879—1955), действительного члена Академии наук СССР и Академии наук УССР.

3589. К шестидесятилетию со дня рождения Рольфа Неванлинны. Кюнци (Zum 60. Geburtstag von Rolf Nevanlinna. Künzi Hans P.), Elem. Math., 1955, **10**, № 5, 97—100 (нем.)

3590. Памяти М. Петровича (In memoriam). Весн. Друштва матем. и физ. Нар. реп. Србије, 1953, **5**, № 3—4, 1—2 (франц.)

К десятилетию со дня смерти выдающегося сербского математика М. Петровича.

3591. Ричардсон (1881—1953) (L. F. Richardson (1881—1953), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, **8**, № 48, 242—245 (англ.)

3592. Памяти Георга Хамеля. Шмейдлер (Zum Gedächtnis an Georg Hamel. Schmeidler Werner), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, **58**, № 1, 1 Abt., 1—5 (нем.)

Краткий очерк жизни, научной и педагогической деятельности известного немецкого механика и математика Г. Хамеля (1877—1954 гг.).

3593. Генрих Вильгельм Эвальд Юнг. Келлер, Энгель (Heinrich Wilhelm Ewald Jung. Keller Ott-Heinrich, Engel Wolfgang), Jahresber. Dtsch. Math. Ver., 1955, **58**, № 1, 1 Abt., 5—10 (нем.)

Некролог немецкого математика Г. В. Э. Юнга (1876—1953 гг.). Приводится краткая характеристика его основных научных работ.

3594 Д. Математика в Армении в древних и средних веках. Петросян Г. Б. Автореф. дисс. докт. физ.-матем. н., Ин-т истории. Сектор матем. и механ. АН Арм. ССР, Ереван, 1955

См. также: 4001, 4010

ОСНОВАНИЯ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

3595. Некоторое свойство обыкновенных исчислений высказываний и предикатов без отрицания. Валпола (Eine Eigenschaft gewöhnlicher negationsloser Kalküle der Propositionen- und Prädikatenlogik. Valpola Veli), Math. scand., 1955, **3**, № 1, 107—114 (нем.)

Рассматриваются некоторые общие свойства логических исчислений (и.) без отрицания, но содержащих импликацию.

Переменные высказывания (в.) обозначаются через $a_1, a_2, \ldots$, логические операторы — через $f_{11}, f_{12}, \ldots, f_{21}, \ldots$ (первый значок указывает число аргументов). Понятие формулы (ф.) вводится обычным индуктивным определением: переменные или постоянные (если такие имеются) в. суть ф.; если $s_{n_1}, s_{m_2}, \ldots, s_{m_n}$ суть ф., то $f_{mn} s_{m_1} s_{m_2} \ldots s_{m_m}$ также ф. Предполагается, что рассматриваемое и. в. содержит по крайней мере одну выводимую ф. и не содержит ложных постоянных в. Пусть среди f_{2n} имеется оператор импликации, обозначаемый через C. Правила вывода и. в. должны быть такими, что (1) подстановка любой ф. вместо всех свободных вхождений некоторого переменного в. переводит выводимую ф. в выводимую ф. (2) из $\vdash s_m$ и $\vdash Cs_m s_n$ следует $\vdash s_n$ ($\vdash$ — знак выводимости), (3) если $\vdash s_{m_1}, \ldots, \vdash s_{m_m}$, то $\vdash f_{mn} s_{m_1} \ldots s_{m_m}$. В этих предположениях доказывается метатеорема 3: Если $\vdash Cs_m s_n$, то ф. s_m и s_n имеют по крайней мере одно общее переменное в., или же $\vdash s_n$.

Приводятся примеры и. в., удовлетворяющих приведенным условиям: положительная часть (выводимые ф., не содержащие знака отрицания) классического и. в., положительная часть конструктивного и. в., положительное и. импликации, имеющее только один логический оператор C (Hilbert D. und Bernays P., Grundlagen der Mathematik. I, 1934, Berlin, 66).

Выполнение условия (3) следует из выводимости в данном и. в.

$$Ca_1 Ca_2 a_1.$$

Эта ф. не выводима в слабом положительном и. импликации (Church A., The weak theory of implication; Kontrolliertes Denken, Untersuchungen zum Logikkalkül und zur Logik der Einzelwissenschaften, 1951, München, 22—37) с аксиомами

$$\vdash Ca_1 a_1,$$

$$\vdash CCa_1 Ca_1 a_2 Ca_1 a_2,$$

$$\vdash CCa_1 Ca_2 a_3 Ca_2 Ca_1 a_3,$$

$$\vdash CCa_2 a_3 CCa_1 a_2 Ca_1 a_3.$$

Однако при помощи арифметической интерпретации автор показывает, что в этом и. имеет место метатеорема 3′: Каждая выводимая ф. имеет вид $Cs_m s_n$, где s_m и s_n имеют по крайней мере одно общее переменное.

Устанавливается существование и., промежуточных (в смысле объема класса выводимых ф.) между положительными и. импликации и слабом положительном и. импликации.

Для того чтобы можно было теорему 3 перенести на узкие и. предикатов, они не должны содержать постоянных предикатов и индивидуумов и вместе с ф., содержащей свободную переменную, должна быть выводима также ф., в которой эта переменная связывается.

В. К. Детловс

3596. О теореме Гёделя для несчетных теорий. Лось (Sur le théorème de Gödel pour les théories indénombrables. Łoś J.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 1954, **2**, № 7, 319—320 (франц.)

О теореме Гёделя для несчетных теорий. Лось Г., Бюлл. Польск. АН, Отд. 3, 1954, **2**, № 7, 323—324

Известно, что теорема о существовании простых идеалов в алгебрах Буля эффективно эквивалентна теореме о представлении алгебр Буля и некоторым другим теоремам (см., например, Stone M. H., Trans. Amer. Math. Soc., 1936, **40**, 37—111; Łoś J., Ryll-Nardzewski C., РЖМат, 1956, 2827). Автор доказывает без использования аксиомы выбора, что теорема Гёделя — Мальцева (которую автор называет теоремой Гёделя) о существовании модели для непротиворечивых несчетных теорий эквивалентна вышеупомянутой теореме о существовании простых идеалов. Это замечание вытекает также из работы Хенкина (РЖМат, 1955, 2077).

H. Rasiowa

3597. К теории моделей I, II, III. Тарский (Contributions to the theory of models. I, II, III. Tarski Alfred), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 572—588; 1955, **A58**, № 1, 56—64; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 572—588; 1955, **17**, № 1, 56—64 (англ.)

Реферируемая статья относится к теории моделей, т. е. к той ветви метаматематики, которая изучает внутренние связи между высказываниями формализованных теорий и математическими системами, в которых они выполняются. Дается систематическое изложение основных определений и понятий теории. Развивается удобная система обозначений. Большинство теорем статьи было получено гораздо раньше и резюмировано (Bull. Amer. Math. Soc., 1953, **59**, 390—391; 1954, **60**, 78). Новыми являются две последние теоремы — теоремы 2.4 и 2.5 в конце § 2 (часть III). Назовем реляционной системой упорядоченную систему $\mathfrak{R} = \langle A, R_0, \ldots, R_\zeta, \ldots \rangle$, в которой A — непустое множество, R_ζ — отношение ранга ν_ζ, т. е. множество упорядоченных ν_ζ, составленных из элементов A ($R_\zeta \subseteq A^{\nu_\zeta}$). Порядком $\overline{\mathfrak{R}}$ реляционной системы $\mathfrak{R}$ будем называть порядковый тип последовательности $\langle R_0, \ldots, R_\zeta, \ldots \rangle$. Мощностью $\overline{\mathfrak{R}}$ реляционной системы $\mathfrak{R}$ назовем мощность A. Подобными будем называть реляционные системы, имеющие одинаковый порядок и одинаковые ранги соответствующих отношений. Класс всех реляционных систем, подобных какой-нибудь реляционной системе, назовем специей (или классом подобия). Фиксируем произвольную специю Q. Все остальные реляционные системы и классы реляционных систем предполагаются взятыми из этой специи. Система $\mathfrak{S} = \langle B, S_0, \ldots, S_\zeta, \ldots \rangle$ называется подсистемой системы $\mathfrak{R} = \langle A, R_0, \ldots, R_\zeta, \ldots, \rangle$, если $B \subseteq A$ и $S_\zeta = R_\zeta \cap B^{\nu_\zeta}$.

Пусть K — класс реляционных систем. Обозначим последовательно через

$S(K)$ — класс всех подсистем всех систем из K,

$S_\gamma(K)$ — класс всех систем из $S(K)$ мощности, меньшей γ,

$H(K)$ — класс всех гомоморфных образов всех систем из K,

$I(K)$ — класс всех изоморфных образов всех систем из K,

$P(K)$ — класс всевозможных прямых произведений систем из K,

$P_\gamma(K)$ — класс прямых произведений систем из K, в которых мощность числа сомножителей меньше γ, $\sigma \in IS(\mathfrak{R})$ (словами: σ изоморфно погрузима в $\mathfrak{R}$) означает, что σ изоморфна подсистеме $\mathfrak{R}$. Пусть $\mathfrak{R} = \langle A, R_0, \ldots, R_\zeta, \ldots\rangle$ — произвольная реляционная система из фиксированной нами специи Q. Пусть $\overline{\mathfrak{R}} = \alpha$ и ранг R_ζ равен ν_ζ. Построим соответствующую специи Q формальную теорию $T(Q)$. Это будет просто узкое исчисление предикатов, содержащее счетное число переменных индивидуумов $\langle V_0, \ldots, V_\zeta, \ldots\rangle$, логические константы: $\rightarrow$, $\vee$, $\&$, $\sim$, ( ), (E), $=$ и постоянные предикаты $\langle P_0, \ldots, P_\zeta, \ldots\rangle$. P_ζ — предикат с ν_ζ пустыми местами. Порядковый тип последовательности $\langle P_0, \ldots, P_\zeta, \ldots\rangle$ равен α. Элементарной формулой является $P_\zeta(V_{i_1}, \ldots, V_{i_{\nu_\zeta}})$. Формула определяется обычным образом. Высказыванием мы называем формулу без свободных переменных. Универсальным высказыванием — формулу вида $(V_{i_1})\ldots(V_{i_k})(\Phi)$, где Φ уже не содержит кванторов.

Пусть σ — произвольное высказывание из $T(Q)$. Реляционная система $\mathfrak{R}$ называется моделью σ, если σ выполняется в $\mathfrak{R}$. Система $\mathfrak{R}$ называется моделью множества высказываний Σ, если $\mathfrak{R}$ — модель для каждого $\sigma \in \Sigma$. Класс реляционных систем $K \subseteq Q$ называется арифметическим классом (в символах: $K \in AC$), если он состоит из всех моделей некоторого высказывания σ из $T(Q)$. Если класс K состоит из всех моделей некоторого множества Σ высказываний из $T(Q)$, он называется арифметическим классом в широком смысле ($K \in AC_\Delta$). Две реляционные системы называются арифметически эквивалентными, если каждое высказывание из $T(Q)$, выполняющееся в одной из этих систем, выполняется и в другой. Если в трех только что приведенных определениях вместо произвольного высказывания всюду поставить универсальное высказывание, мы получим определения соответственно универсального (арифметического) класса K ($K \in UC$), универсального класса в широком смысле ($K \in UC_\Delta$) и универсально эквивалентных реляционных систем.

В § 1 (I и II) дается несколько простых теоретико-множественных критериев универсальности и в широком смысле класса реляционных систем и универсальной эквивалентности двух систем. Приходится отдельно рассматривать случаи систем конечного и бесконечного порядка. Автор выделяет результаты, получающиеся с использованием аксиомы выбора.

Теорема 1.1: Если $\mathfrak{S}$ — конечная реляционная система конечного порядка и K — класс всех подобных $\mathfrak{S}$ систем R таких, что $\mathfrak{S} \notin IS(R)$, то $K \in UC$. Для систем конечного порядка без помощи аксиомы выбора автор получает следующий критерий (теорема 1.2): чтобы класс K реляционных систем конечного порядка $\in UC_\Delta$, необходимо и достаточно выполнение трех условий: 1) $S(K) \subseteq K$; 2) $I(K) \subseteq K$; 3) для любой реляционной системы $\mathfrak{R} \in Q$ из $S_\omega(\mathfrak{R}) \subseteq K$ следует $\mathfrak{R} \in K$. Чтобы две системы $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{S}$ конечного порядка были универсально эквивалентными, необходимо и достаточно выполнение двух условий: 1) $S_\omega(\mathfrak{R}) \subseteq IS(\mathfrak{S})$ и 2) $S_\omega(\mathfrak{S}) \subseteq IS(\mathfrak{R})$ (теорема 1.3).

Автор также без помощи аксиомы выбора обобщает (но не переносит — см. реф. 3598) эти теоремы на системы произвольного порядка. С помощью аксиомы выбора, но зато сразу для систем произвольного порядка доказываются эквивалентность условия $K \in UC_\Delta$ и пары условий: $K \in AC_\Delta$ и $S(K) \subseteq K$ (теорема 1.7), условия $K \in UC$ и пары условий: $K \in AC$ и $S(K) \subseteq K$ (теорема 1.8). Здесь и дальше K — некоторый класс в Q. Автор получает некоторые свойства классов в AC_Δ и UC_Δ. Например, если $K \in AC_\Delta$, то $S(K) \in UC_\Delta$ (теорема 1.6), $SH(K) \in UC_\Delta$ — $SIP_3(K) \in UC_\Delta$; если $K \in UC_\Delta$, то $H(K) \in UC_\Delta$; если $K \in UC_\Delta$ и $P_3(K) \subseteq K$, то $P(K) \subseteq K$ (теорема 1.11 — без аксиомы выбора).

§ 2 (III) реферируемой статьи посвящен изучению подкласса специи Q — класса алгебраических систем R. Реляционная система $\mathfrak{A} = \langle A, O_0, \ldots, O_\zeta, \ldots\rangle$ называется алгебраической системой или алгеброй, если 1) каждое ее отношение O_ζ — операция, т. е. униформное множество, и 2) областью определения ν операции O_ζ служит A^ν (иными словами — если для каждой упорядоченной $\nu\langle x_0, \ldots, x_{\nu-1}\rangle \in A^\nu$ существует единственное $x_\nu \in A$ такое, что $\langle x_0, \ldots, x_\nu\rangle \in O_\zeta$).

В специи Q естественно выделяется подкласс — класс алгебраических систем R. Очевидно, что $I(R) \subseteq R$ и $P(R) \subseteq R$. Но, вообще говоря, не верно: $S(R) \subseteq R$ и $H(R) \subseteq R$. Подсистема алгебраической системы $\mathfrak{A}$, сама являющаяся алгебраической системой, называется алгебраической подсистемой. Классом алгебраических подсистем алгебры $\mathfrak{A}$ будет класс $S(\mathfrak{A}) \cap R$.

Изучать подкласс $R \subseteq Q$ удобнее при помощи модифицированного формализма $T(R)$, получающегося из $T(Q)$ заменой $(\nu+1)$-местных предикатов на ν-местные символы операций. Элементарными формулами теперь служат равенства термов. Высказывание из $T(R)$ вида $(V_{i_1})\ldots(V_{i_k})(\varphi)$, где φ — равенство, называется тождеством. Класс алгебраических систем $K \subseteq R$ называется эквациональным классом алгебраических систем (в символах: $K \in EC$), если он состоит из всех моделей конечного множества тождеств.

Соответственно, класс K моделей произвольного множества тождеств называется эквациональным классом в широком смысле ($K \in EC_\Delta$). Автор приводит без доказательства два критерия эквациональности в широком смысле класса K алгебраических систем произвольного порядка. Чтобы $K \in EC_\Delta$, необходимо и достаточно выполнение трех условий: 1) $S(K) \cap R \subseteq K$, 2) $H(K) \cap R \subseteq K$ и 3) $P(K) \subseteq K$ (Birkhoff, Proc. Cambridge Philos. Soc., 1935, 31, 441) или 1) для любой $\mathfrak{A} \in R$ из $S_\gamma(\mathfrak{A}) \subseteq S(K)$ вытекает $\mathfrak{A} \in K$, 2) $H(K) \cap R \subseteq K$ и 3) $P_\gamma(K) \subseteq K$, где γ — любое бесконечное кардинальное число, большее порядка алгебраических систем из K (Chang, Rubin and Tarski, Bull. Amer. Math. Soc., 1954, 60, 76—77). Для алгебр конечного порядка он доказывает несколько более простой критерий: для $K \in EC_\Delta$ необходимо и достаточно выполнение трех условий: 1) для любой $\mathfrak{A} \in R$ из $S_\omega(\mathfrak{A}) \subseteq S(K)$ следует $\mathfrak{A} \in K$, 2) $H(K) \cap R \subseteq K$ и 3) $P_3(K) \subseteq K$ (теорема 2.2). Алгебра отношений — это система из множества A, двух бинарных операций $+$ и $\cdot$, двух унарных операций $\breve{}$, и выделенного элемента 1' (который можно заменить унарной операцией). Эти операции должны удовлетворять некоторым аксиомам (Chin L. H., Tarski A., Distributive and modular laws in the arithmetic of relation algebras. Univ. Calif. Public. Math., 1951, 1, 341—384), записываемым в виде тождеств. Собственная алгебра отношений — это алгебра отношений, в которой A — семейство бинарных отношений, содержащихся в данном единичном отношении 1; $+$ — теоретико-множественное сложение и, $\cdot$ — композиция отношений, $\breve{}$ — теоретико-множественное дополнение до 1, $\breve{}$ — операция обращения отношения, 1' — отношение тождества, ограниченное 1 — т. е. множество всех упорядоченных пар $\langle x, x\rangle$, входящих в 1. Алгебра, изоморфная собствен-

ной алгебре отношений, называется представимой алгеброй отношений.

В заключительной части параграфа изучается некоторый специальный класс алгебраических систем, класс L представимых алгебр отношений (the representable relation algebras), подкласс эквационального класса M алгебр отношений (the relation algebras). Он, в свою очередь, является подклассом класса R' алгебраических систем некоторой особой специи Q' ($L \subset M \subset R' \subset Q'$).

Автор доказывает: $L \in EC_\Delta$ (теорема 2.4) — и выводит отсюда некоторые свойства класса L: $H(L) \cap R' \subseteq L$ и для любой $\mathfrak{A} \in R'$ из $S_\omega(\mathfrak{A}) \subseteq IS(L)$ вытекает $\mathfrak{A} \in L$ (теорема 2.5).

Автор отмечает, что до сих пор неизвестно конструктивного доказательства теоремы 2.4 и прямого доказательства (без теоремы 2.4) теоремы 2.5. Неизвестно также, верно ли предположение $\in LEC$. Теоремы 2.4 и 2.5 исправляют некоторые ошибочные утверждения Линдона (Lyndon, Ann. Math., 1950, **51**, 723, 726, 729) и автора (Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, 172).

Ю. А. Шиханович

3598. Замечания об универсальных классах реляционных систем. **В о т** (Remarks on universal classes of relational systems. V a u g h t R o b e r t L.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch. 1954, **A57**, № 5, 589—591; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 589—591 (англ.)

В статье Тарского (реф. 3597) дается критерий универсальности в широком смысле класса реляционных систем конечного порядка (теорема 1.2). В реферируемой статье автор дает критерий просто универсальности и показывает на примере, что теоремы 1.1, 1.2 статьи Тарского и теорема автора не переносятся на системы бесконечного порядка.

Критерий автора: Пусть K — некоторый класс (подобных — из специи Q) реляционных систем конечного порядка. Чтобы $K \in UC$, необходимо и достаточно выполнение трех условий: 1) $S(K) \subseteq K$, 2) $I(K) \subseteq K$ и 3) существует такое натуральное число ν, что для любой системы $\mathfrak{R} \in Q$ из $S_\nu(R) \subseteq K$ следует $\mathfrak{R} \in K$.

Ю. А. Шиханович

3599. О высказываниях, выполняющихся в прямых произведениях реляционных систем. **В о т** (On sentences holding in direct products of relational systems. V a u g h t R o b e r t L.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 409—410 (англ.)

Пусть Q — специя реляционных систем конечного порядка, σ — высказывание из $T(Q)$, $\mathfrak{A}_\zeta$ — система из Q ($\zeta = 1, 2, 3, \ldots$; или $\zeta \in I$). (Терминологию и обозначения см. реф. 3597). Автор приводит без доказательства три теоремы о прямых произведениях реляционных систем, первая из которых решает проблему, поставленную Лосем (J. Łós).

Т е о р е м а 1. Если для каждого натурального n $\mathfrak{P}_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ — модель для σ, то и $\mathfrak{P}_{i=1}^{\infty} \mathfrak{A}_i$ — модель для σ, где σ — элементарное предложение.

Т е о р е м а 2. Если для каждого $J \subseteq I$ $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_i / i \in J)$ — модель для σ, то $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}_i / i \in I)$ — модель для σ.

Т е о р е м а 3. Пусть класс $K \in AC_\Delta$. Если $P\omega(K) \subseteq K$, то $P(K) \subseteq K$.

Автор приводит также без доказательства две теоремы, относящиеся к проблеме разрешимости.

Т е о р е м а 4. Если теория каждой из реляционных систем $\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n$ разрешима, то разрешима и теория системы $\mathfrak{P}_{i=1}^{n} \mathfrak{A}_i$ (Feferman).

Т е о р е м а 5. Если теория класса K реляционных систем разрешима, то разрешима и теория системы $\mathfrak{P}(\mathfrak{A}^{\aleph_0} / \mathfrak{A} \in K)$.

Ю. А. Шиханович

3600. Полиадические булевы алгебры. **Х а л м о ш** (Polyadic Boolean algebras. H a l m o s P a u l R.), Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A., 1954, **40**, № 5, 296—301 (англ.)

Внелогической, точнее — алгебраической, интерпретацией исчисления высказываний служат булевы алгебры. В качестве аналогичной интерпретации узкого исчисления предикатов предлагались цилиндрические алгебры (Tarski A., Thompson, Bull. Amer. Math. Soc., 1952, 58, 65). Автор предлагает другую интерпретацию: полиадические булевы алгебры — которая выгоднее, например, тем, что имитирует процесс подстановки. Полиадические булевы алгебры представляют, по мнению автора, и самостоятельный алгебраический интерес.

Квантором (точнее: квантором существования) на булевой алгебре A называется отображение $\exists$ булевой алгебры A в себя, удовлетворяющее условиям Q_1 — Q_3: $Q_1)$ $\exists 0 = 0$, $Q_2)$ $p \leqslant \exists p$, $Q_3)$ $\exists(p \wedge \exists q) = \exists p \wedge \exists q$.

Пусть I — множество. Обозначим через ε тождественное отображение I на себя, а через T полугруппу всех таких преобразований τ множества I в себя, которые отличаются от ε лишь на конечном множестве. «Пара» $\langle A, I \rangle$, где A — булева алгебра, а I — множество, называется полиадической булевой алгеброй, если можно каждому конечному подмножеству J множества I поставить в соответствие квантор $\exists_J$ на A и каждому преобразованию $\tau \in T$ поставить в соответствие булев эндоморфизм $\bar{\tau}$ на A так, что кванторы $\exists_J$ и булевы эндоморфизмы $\bar{\tau}$ будут удовлетворять условиям P_1—P_7: $P_1)$ Если $J = \Lambda$ (J — пустое), то $(P)_A [\exists_J p = p]$; $P_2)$ $\exists_J \cdot \exists_K = \exists_{J \cup K}$; $P_3)$ $(P)_A [\overline{\exists P} = P]$; $P_4)$ $\overline{(\sigma\tau)} p = \bar{\sigma}(\bar{\tau} p)$; $P_5)$ если $\sigma = \tau$ вне J, то $\bar{\sigma} \exists_J = \bar{\tau} \exists_J$; $P_6)$ если τ взаимно однозначно на $\tau^{-1}J$, т. е. $(i_1)_I (i_2)_I [(i_1 \neq i_2) \& (\tau i_1 = \tau i_2) \rightarrow (\tau i_1 \notin J)]$, то $\exists_J \cdot \bar{\tau} = \tau \cdot \exists_{\tau^{-1}J}$; $P_7)$ $(P)_A (EJ)_I (K)_I [K \cap J = \Lambda \rightarrow \exists_K P = P]$ (J — конечное).

Если X и I — произвольные множества, а B — полная (в теоретико-структурном смысле), в частности конечная, булева алгебра, то множество A функций, отображающих X^I в B, представляет полиадическую булеву алгебру $\langle A, I \rangle$. Основная теорема статьи утверждает, что каждая простая полиадическая булева алгебра изоморфна такой «функциональной» полиадической булевой алгебре $\langle A, I \rangle$, если в качестве B брать двухэлементную булеву алгебру $\{0,1\}$.

Автор не приводит доказательства этой и ряда других теорем, характеризующих полиадические булевы алгебры, и лишь указывает, что идея доказательства возникла у него после работ Расёвой и Сикорского (Rasiowa H., Sikorski, Fundam. Math., 1950, **37**, 193—200) и Хенкина (Henkin L., J. Symbolic Logic, 1949, **14**, 159—166).

В этой новой интерпретации узкого исчисления предикатов такие классические результаты математической логики, как гёделевские теоремы о полноте и о неполноте и непротиворечивость континуум-гипотезы, допускают чисто алгебраическую формулировку. Например, гёделевская теорема о полноте формулируется в терминах теории полиадических булевых алгебр следующим образом: каждая полиадическая булева алгебра полупроста (т. е. пересечение всех ее максимальных идеалов состоит только из 0).

Ю. А. Шиханович

3601. Полиадические булевы алгебры. **Х а л м о ш** (Polyadic boolean algebras. H a l m o s P a u l R.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 402—403 (англ.)

Дается краткое изложение статьи автора под тем же названием (см. реф. 3600).

Ю. А. Шиханович

3602. Теория функций со свободными переменными. Гудстейн (A free variable function theory. Goodstein Reuben Louis), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 401—402 (англ.)

Краткое резюме основных установок финитистской системы математического анализа, именуемой автором рекурсивной теорией функций, в которой формулируются для поля рациональных чисел аналоги теорем классического анализа при помощи такой релятивизации понятий, которая позволяет обходиться без пределов и вещественных чисел (РЖМат, 1956, 1913).

Б. А. Трахтенброт

3603. Новый символизм для исчисления высказываний. Парри (A new symbolism for the propositional calculus. Parry William Tuthill), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 3, 161—168 (англ.)

Дается обзор символизмов для исчисления высказываний. Более подробно обсуждается «диагональный» символизм Пирса и «колесообразный» символизм Лесневского. Указанные символизмы имеют индивидуальные знаки для каждой из 16 функций от двух аргументов. Автор предлагает новые символизмы, представляющие варианты символизма Лесневского.

Трапецеобразный символизм строится следующим образом. Функциям $p\&q$, $p\&\bar{q}$, $\bar{p}\&\bar{q}$ и $\bar{p}\&q$ соответствуют функции $p\,_\,q$, p/q, $p\,\overline{_}\,q$ и p/q, где знаки операций являются сторонами равнобочной трапеции $\sqsupset$; тождественной лжи соответствует пустой символ или «X», т. е. $p \times q$. Знаки, отвечающие остальным функциям от двух аргументов, представляют графически часть трапеции и определяются подобно тому, как это сделано в символизме Лесневского. Пусть $f(p, q) = pFq$, $g(p, q) = pGq$ и $h(p, q) = pHq$, где F, G и H — графическое написание символов операций, тогда при $h(p, q) = f(p, q) \& g(p, q)$ и $h(p, q) = f(p, q) \vee g(p, q)$. Знак для H представляет графически соответственно пересечение и сумму в теоретико-множественном смысле графических изображений, отвечающих знакам F и G, и при $h(p, q) = \overline{f(p.q)}$ знак для H графически изображается дополнением к трапеции множества, отвечающего знаку F. По этому правилу функциям $p \vee q$, $p \supset q$ и $p \equiv q$ отвечают соответственно функции $p \cup q$, $p \sqsupset q$ и $p \sqsubset q$. Трапецеобразный символизм обладает рядом хороших свойств, которые присущи, например, символизму Лесневского. Однако, как отмечает автор, в нем графическое изображение знаков операций максимально приближается к общепринятым изображениям знаков соответствующих операций.

Квадратный символизм строится аналогично, исходя из сторон квадрата $\square$, причем для различия левой боковой стороны от правой боковой стороны вводятся символы $\sqsubset$ и $\sqsupset$. В качестве достоинств приведенного символизма отмечается, что формулы, записанные с помощью этих знаков, могут быть напечатаны при помощи обычной пишущей машинки.

Далее, приводятся знаки для функций одного переменного:

$\neg p$, $\llcorner p$, $|\,p$ и $\overline{\neg|_}\,p$ для p, $\bar{p}$, $p\&\bar{p}$ и $p \vee \bar{p}$.

Автор отмечает, ссылаясь на Стандли, что построенный символизм может быть обобщен на случай функций от любого числа аргументов (реф. 3604).

В заключение автор предлагает новую терминологию для функций от двух аргументов. С. В. Яблонский

3604. Идеографические расчеты в исчислении высказываний. Стандли (Ideographic computation in the propositional calculus. Standley Gerald B.), J. Symbolic Logic, 1954, 19, № 3, 169—171 (англ.)

Предлагается более компактная запись для трапецеобразного исчисления Парри (реф. 3603). Так, в случае формул от двух переменных p и q для обозначения p вместо $p \llcorner q$ берут символ $\llcorner$ и для обозначения q вместо $p \lrcorner q$ берут символ $\lrcorner$. Ниже определяются правила «сращивания» символов. Например, символ для дизъюнкции двух символов есть сумма этих символов, символ для конъюнкции двух символов есть пересечение этих символов, символ для отрицания символа есть дополнение (до трапеции) к данному символу. Пустой символ обозначается через «X».

В случае n переменных ($n > 2$) поступают так: для первых n — 1-го переменного символы получаются путем дублирования соответствующих символов, рассматриваемых как символов для n—1-го переменного, для n-го переменного берут символ $\underbrace{\sqsupset \ldots \sqsupset}_{2^{n-3}} \underbrace{X \ldots X}_{2^{n-3}}$.

Например: в случае трех переменных p, q и r имеем соответственно символы $\llcorner\!\lrcorner$, $\sqcup$ и $\sqsupset X$.

Для уменьшения трудностей при оперировании с выражениями, зависящими от большого числа переменных, употребляется сокращенная запись (для шести переменных $p \equiv s$ запишется как 4 $\llcorner\!\lrcorner$ 77), а при вычислении нормальных форм расчеты ведутся столбиком.

Далее дается правило построения нормальной формы по трапецеобразному символу. В конце сообщаются два правила, которые позволяют построить по трапецеобразному символу более компактное выражение, чем совершенная нормальная форма.

С. В. Яблонский

3605. О возможности доказать непротиворечивость простой теории типов. Ганди (On the possibility of proving the consistency of the simple theory of types. Gandy Robin Oliver), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 400—401 (англ.)

Формулируется (генценовского типа) система для простой теории типов, родственная также системе Чёрча для теории типов (Church A., J. Symbolic Logic, 1940, 56—68). Эта система не эквивалентна системе Черча (например, она не содержит в числе своих выводимых правил правила переименования связанных переменных; коллизии устраняются путем переименования переменных во всем доказательстве). Утверждается, что непротиворечивость системы Черча легко может быть доказана в предположении, что непротиворечива рассматриваемая система. Доказательство не приводится.

А. С. Есенин-Вольпин

3606. С логической точки зрения. Логико-философские очерки. Куайн (From a logical point of view. Logico-philosophical essays. Quine W. V., Cambridge. Mass. Harvard University Press, 1953, VI, 184 p.) (англ.)

Этот сборник объединяет девять трудов: I. Предмет исследования; II. Две догмы эмпиризма; III. Проблема смысла в лингвистике; IV. Тождество, очевидность (ostension) и гипостась; V. Новые основания (New Foundations) математической логики; VI. Логика и овеществление универсалий; VII. Замечания к теории отношений; VIII. Референция (reference) и модальность; IX. Смысл и экзистенциальный вывод. Перечисленные работы до III включительно уже были ранее в известных пределах опубликованы; но все они подверглись тщательному пересмотру и основательно переработаны и дополнены. Читателя, интересующегося главным образом возможностями построения наиболее обширной и наименее сложной математической логики, должен больше всего заинтересовать раздел V. Текст этого раздела распадается на две части. Часть I содержит куайнову систему (New Foundations (N. F.),

1937 г.) с рядом дополнительных теорем и исправлений; эта система импонирует своей простотой по сравнению с аппаратом Principia Mathematica. Единственное, что затемняет в глазах референта кристальную ясность сопоставления обеих систем — это пробел между высказанной на стр. 89 претензией на дедуктивную силу Principia и позднейшим утверждением (стр. 98 и след.), что критическое арифметическое неравенство $z \neq z+1$, которое понадобилось Расселлу для введения аксиомы бесконечности, повидимому, недоказуемо и в N. F. (имеет ли здесь место непостроенный случай ω-неполноты, или на стр. 89 имеется в виду система Principia без аксиомы бесконечности? Явно этого не сказано и, кроме того, не говорится, в каком отношении к расселловской аксиоме бесконечности находится существование бесконечной последовательности $\Lambda, \{\Lambda\}, \{\{\Lambda\}\}, \ldots$ Напротив, в дополнительных замечаниях (часть II), появляющихся впервые, необычайно ясные указания на системы Цермело и фон Неймана указывают путь от N. F. к последней работе автора «Mathematical Logic» в ее варианте 1951 г.— весьма вероятно, не подверженном кризисам. Выясняется, в каком точном смысле эта последняя система оказывается сильнее систем Цермело и фон Неймана, и таким образом является на сегодняшний день самой сильной системой, безупречность которой в отношении кризисов можно предположить на указанной ступени — конечно, без прочного семантического обоснования, которое представляется референту в высшей мере желательным. В этой связи в VI показывается, что можно выиграть при построении математической логики в отношении онтологических предположений, а также в отношении ясности различий, если в качестве переменных допускать лишь такие символы, для которых в крайнем случае, как при введении обозначений, предусмотрено также употребление квантора в определении, тогда как все остальное поручается схематическим буквам, или на языке Фреге: неопределенным буквам, относящимся к любым выражениям. Онтология такой системы содержит в точности те объекты, которые совпадают с возможными значениями своих переменных. По мнению референта, тезис раздела I («быть допущенным в качестве объекта... значит быть рассмотренным в качестве значения переменной»), благодаря дополнительным требованиям раздела VI, предстает в таком свете, что напрашивающиеся возражения появляются вновь, или по крайней мере должны быть приняты во внимание. Об остальных разделах скажем лишь, что в II критикуется понятие аналитичности, поддерживаемое в математической логике главным образом Карнапом, и что под референцией (reference) в VII и VIII понимается то самое, что обычно, следуя Тарскому, именуют семантикой. Обстоятельные литературные указания и индекс, который на основе проведенных выборочных проб следует считать весьма надежным, повышают ценность рассматриваемого труда. Печатный текст тщательно проверен. Референт обнаружил лишь незначительные недосмотры. Все же приходится глубоко пожалеть, что замечательная работа «Whitehead and the rise of modern logic» (помещенная в «The philosophy of Alfred North Whitehead», P. A. Schilpp, Evanston and Chicago, 1941, 127—163) не освещена хотя бы в разделах III, IV и IX, которые референту кажутся слабее остальных. Эта не замеченная автором работа содержит опирающуюся на примеры конструктивную критику или, пожалуй лучше сказать, критическую реконструкцию — Principia и в этом смысле служит существенным дополнением к разделу V. H. Scholz

Перевод из Zbl. Math, 1954, 50, № 1/5, 4.

3607 Д. Степени трудности массовых проблем. М е д в е д е в Ю. Т. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

См. также: 4004

ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ

3608. Числа с ограниченным отношением и их приложения к вопросам диофантовых приближений. К о р о б о в Н. М., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 5, 361—380

Пусть q — целое, большее 1. Число α задано разложением в q-ичной системе счисления:

$$\alpha = 0,\ \delta_1\delta_2 \cdots \delta_{k+1} \cdots \delta_{k+n} \cdots \qquad (1)$$

Рассматриваются n-значные числа $\delta_1 \ldots \delta_n$, $\delta_2 \ldots \ldots \delta_{n+1}, \ldots$, образованные группами по n последовательных знаков разложения (1), и пусть для некоторого λ среди первых λ n-значных чисел встретится каждое из q^n существующих в q-ичной системе счисления n-значных чисел. $\lambda = \lambda(n)$ — наименьший из индексов, обладающих этим свойством. Число α называется числом с ограниченным отношением, если существует постоянное $C_1 = C_1(\alpha)$ такое, что при всех $n \geqslant 1$, будет $\lambda(n)/q^n < C_1$.

Доказывается существование и дается метод построения чисел с ограниченным отношением.

Доказывается теорема: Для того чтобы существовало число $C > 0$, для которого при любых β и $t \geqslant 1$ найдутся целые числа x и y, удовлетворяющие неравенствам $0 \leqslant x < Ct$, $|\alpha q^x - y - \beta| < 1/t$, необходимо и достаточно, чтобы α было числом с ограниченным отношением.

Далее рассматривается некоторая модификация этой теоремы и перенесение ее на s-мерный случай (s — любое целое $\geqslant 1$), для чего вводится понятие о числах с ограниченным общим отношением. Доказывается, что для разрешимости в целых числах системы неравенств

$$\left.\begin{aligned} |\alpha_1 q_1^x - y_1 - \beta_1| &< 1/t \\ 0 \leqslant x < Ct^s \quad &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ |\alpha_s q_s^x - y_s - \beta_s| &< 1/t \end{aligned}\right\}$$

где $q_1, \ldots, q_s$ — любые целые, большие единицы, необходимо и достаточно, чтобы числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ были числами с ограниченным общим отношением.

Решается задача о нахождении чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$, для которых система функций $\alpha_1 q_1^x, \alpha_2 q_2^x, \ldots, \alpha_s q_s^x$ равномерно распределена в s-мерном пространстве, причем для числа $N(v)$ дробных долей этой системы функций, при $x = 1, 2, \ldots, P$, попадающих в заданную часть объема v единичного s-мерного куба, выводится формула

$$N(v) = vP + O(P^{1-1/(s+1)}).$$

В частности, при $s = 1$ получим отсюда для любого интервала длины γ, лежащего в $(0, 1)$, число $N(\gamma)$ дробных долей αq^x $N(\gamma) = \gamma P + O(\sqrt{P})$.

Ставится вопрос о классе чисел α, для которых эта оценка остаточного члена может быть улучшена. Г. В. Емельянов

3609. Многомерный случай неулучшаемых оценок тригонометрических сумм с показательными функциями. Полосуев А. М., Докл. АН СССР, 1955, 104, № 2, 186—189

Доказывается теорема: Какова бы ни была как угодно медленно стремящаяся к бесконечности функция $\varphi(p)$ при $p \to \infty$, можно подобрать такую систему чисел α_l $(l = 1, 2, \ldots, s)$, что при любых одновременно не равных нулю целых $m_1, \ldots, m_s$ и $q_l \geqslant 2$ имеет место оценка

$$\sum_{x=1}^{p} \exp 2\pi i \sum_{l=1}^{s} m_l \alpha_l q_l^x = o(\varphi(p)).$$

Ни для каких $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ эту оценку улучшить до $O(1)$ нельзя. Этот результат является обобщением аналогичной теоремы Н. М. Коробова (РЖМат, 1953, 33; реф. 3608) для случая $s = 1$. А. И. Виноградов

3610. Представление некоторых теоретико-числовых функций при помощи контурных интегралов. Куртяков С. У., Уч. зап. Тадж. ун-та, 1955, 4, 9—11

Автор пользуется тем, что функция $f(z) = \pi \operatorname{ctg} \pi z \times \times \operatorname{cosec} 2\pi z^{-1} \sin 2\pi \Gamma(z) z^{-1}$ имеет особые точки только в $z = 0$, $z = (2n)^{-1}$, где n — целое число, и во всех простых числах, которые для нее являются простыми полюсами с вычетами, равными единице. Арифметические функции, означающие число простых чисел, не превосходящих данного x, число простых чисел данной прогрессии, содержащихся в данном интервале, число близнецов, не превосходящих данного x, и число разложений данного числа на сумму двух простых чисел, выражаются в работе в виде контурных интегралов, содержащих указанную выше функцию $f(z)$. Оценки контурных интегралов не рассматриваются. Н. П. Романов

3611. Об одной арифметической оценке, связанной с гипотезой Римана. Куртяков С. У., Уч. зап. Тадж. ун-та, 1955, 4, 13—17

В первой части (реф. 3610) автор доказывает ряд арифметических тождеств, пользуясь теорией ортонормированных систем. Все эти тождества можно было бы получить совсем просто. Наиболее интересно из них следующее:

$$\Sigma n^{-s/2} \Sigma_{d/n} \log(d,\ n/d) = -\zeta^2(s/2)\,\zeta'(s)/\zeta(s),$$

где $\left(d,\ \frac{n}{d}\right)$ — общий наибольший делитель чисел d и $\frac{n}{d}$. (В работе в указанном тождестве знак Σ во внутренней сумме пропущен. *Прим. реф.*). Даются также вытекающие из этого тождества нетривиальные связи оценки произведения $\Pi_{xy \leqslant x}(x, y)$ ((x, y) — общий наибольший делитель чисел x и y) с гипотезой Римана. Н. П. Романов

3612. К гильбертову решению проблемы Варинга: оценка $g(n)$. Ригер (Zur Hilbertschen Lösung des Waringschen Problems: Abschätzung von $g(n)$. Rieger Georg Johann), Mitt. math. Semin. Giessen, 1953, № 44, 1—35 (нем.)

Подробное изложение статьи автора (РЖМат, 1954, 5039). Кроме того, имеется элементарное доказательство теоремы Варинга — Гильберта (по Е. Стридсбергу). С. В. Огай

3613. К формальной теории равного распределения в компактных группах. Главка (Zur formalen Theorie der Gleichverteilung in kompakten Gruppen. Hlawka Edmund), Rend. Circolo mat. Palermo, 1955, 4, № 1, 33—47 (нем.)

Пусть G — компактная группа; с полной мерой Хаара, равной 1. $D_i(i = 0, 1, 2, \ldots)$ — классы неприводимых представлений группы G, $D_i(x)$ — соответствующие унитарные матрицы порядка r_i. Пусть, далее, F обозначает множество всех последовательностей $f = \{x_1, x_2, \ldots\}$ из G; $A = (a_{ik})$ — бесконечная матрица, с действительными неотрицательными элементами a_{ik}, удовлетворяющими условиям: $\lim_{i \to \infty} a_{ik} = 0$ для любого данного k; $A_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}$ сходится и стремится к единице при $i \to \infty$.

Для любой ограниченной на G функции $\Phi(x)$ пусть

$$M_N(\Phi, f, A) = \sum_{k=1}^{\infty} a_{Nk} \Phi(x_k),$$

$$M(\Phi, f, A) = \lim_{N \to \infty} M_N(\Phi, f, A).$$

Последовательность f из G называется A-равнораспределенной, если для любой непрерывной функции $\Phi(x)$ существует $M(\Phi, f, A)$ и

$$M(\Phi, f, A) = \int_G \Phi\, dx = M(\Phi).$$

Множество S из F называется A-равномерно равнораспределенным на G, если для любой f из S и произвольной непрерывной функции $\Phi(x)$ $M_N(\Phi, f, A)$ равномерно стремится к $M(\Phi)$.

Последовательность $f = \{x_1, x_2, \ldots\}$ называется A-равномерно равнораспределенной, если множество $S(f)$ последовательностей $f_h = \{x_{i+h}\}$ $(h = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ A-равномерно распределено в G. Доказывается 8 теорем, из них:

Теорема 3. Если $\Phi(x)$ — почти всюду непрерывная на G функция, $M(|\Phi|) \neq 0$, $f = \{x_i\}$ — A-равномерно распределенная последовательность, $\sigma > 0$ — действительное число, (α_i) — последовательность положительных чисел $0 < \alpha_{i+1} \leqslant \sigma \alpha_i$ $(i \geqslant 1)$, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi(z_i)$ абсолютно сходится, то $\sum_{i=1}^{\infty} |\alpha_i| < \infty$, и, в частности, $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \Phi(z_i)$ абсолютно сходится для любой последовательности $\{z_i\}$, когда Φ ограничена.

Теорема 5. Если $U_1, U_2, \ldots, U_N$ — квадратные матрицы одного и того же порядка, а q — натуральное число $1 \leqslant q \leqslant N$, то

$$q^2 \left| \sum_{i=1}^{N} U_i \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant (N + q - 1) \left(q \sum_{i=1}^{N} |U_i|^2 + 2\mathrm{R} \sum_{h=1}^{q-1} (q-h) \sum_{j=1}^{N-h} \frac{U_j}{U_{j+h}} \right).$$

(R — действительная часть). Развиваются результаты Еккмана (Eckmann B., Comment. math. helv., 1943, 16, 249—263) по свойствам понятия равного распределения в компактных группах. П. Г. Когония

3614. О предельных элементах одного замкнутого множества целых алгебраических чисел. Дюфренуа, Пизо (Sur les éléments d'accumulation d'un ensemble fermé d'entiers algébriques. Dufresnoy J., Pisot C.), Bull. sci. math., 1955, 79, mars-avril, 54—64 (франц.)

Прилагаются методы, изложенные в статье тех же авторов (РЖМат, 1956, 980). Обозначим буквой S замкнутое множество тех целых алгебраических чисел θ, все сопряженные которых лежат в единичном круге. Отыскиваются малые элементы производного множества S'.

Пусть функция $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}u_kz^k$ мероморфна в $|z|\leqslant 1$; где она имеет единственный простой полюс $z=\alpha$, лежащий в интервале (0, 1); кроме того, пусть $|f(z)|\leqslant 1$ на $|z|=1$. Предположим, что найдутся полиномы $E_n(z)$ и $E_n^*(z)$ степени n такие, что $E_n(0)=1$; $E_n^*(0)=1$; $-z^nE_n(1/z)/E_n(z)=u_0+\cdots+u_{n-1}z^{n-1}+w_nz^n+\cdots$; $z^nE_n^*(1/z)/E_n^*(z)=u_0+\cdots+u_{n-1}z^{n-1}+w_n^*z^n+\cdots$.

Утверждается без доказательства, что тогда $w_n\leqslant u_n\leqslant w_n^*$. В случае строгого неравенства полиномы $E_n(z)$ и $E_n^*(z)$ имеют в $|z|<1$ по единственному простому нулю, $1/\tau_n$ и $1/\tau_n^*$ соответственно, причем $\tau_n<1/\alpha<\tau_n^*$.

Пусть, далее, $Q(z)$ — неприводимый полином с целыми коэффициентами ($Q(0)=1$), нулем которого является число $1/\theta$, где θ — элемент S. Кроме того, пусть существует полином $A(z)$ с целыми коэффициентами такой, что на $|z|=1$, $|A(z)|\leqslant|Q(z)|$, но $|A(z)|\not\equiv|Q(z)|$. Известно, что существование такого полинома $A(z)$ есть необходимое и достаточное условие принадлежности θ к S'. Доказываются теоремы:

1. Если $A(z)/Q(z)=\sum_{k=0}^{\infty}v_kz^k$, то коэффициенты w_n и w_n^* удовлетворяют неравенству $w_n+1\leqslant v_n\leqslant w_n^*-1$ для всех $n\geqslant m$ (m указано).

2. Единственные дроби A/Q, соответствующие тем числам θ из S', которые меньше 1, 8, суть следующие

$$\frac{1-z^2}{1-z-z^2}\quad\text{и}\quad\frac{1}{1-z-z^2}\quad\text{для}\quad\theta=\eta_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

$$\frac{1-z+z^2-z^3}{1-2z+z^2-z^3}\quad\text{и}\quad\frac{1-z+z^2}{1-2z+z^2-z^3}\quad\text{для}\quad\theta=\eta_2$$

(η_2 — квадрат наименьшего элемента множества S). η_1 и η_2 — единственные числа из S', лежащие между нулем и 1,8. В. А. Магарик

3615. Некоторые новые результаты в изучении одного замечательного множества целых алгебраических чисел. Пизо (Quelques résultats nouveaux dans l'étude d'un ensemble remarquable d'entiers algébriques. Pisot C.), Sémin. P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 8, № 15, 1—2 (франц.)

Пусть θ — целое алгебраическое число, все сопряженные которого по модулю меньше единицы. Известно, что множество S таких чисел θ замкнуто (Salem R., Duke Math. J., 1944, 11, 103—108). Отыскиваются малые элементы производного множества S'.

Без доказательств указан один метод, который позволяет отыскать два элемента множества S'. Именно, в интервале [0; 1,8] только два числа принадлежат S'; это $\theta_1'=(1+\sqrt{5})/2$ и $\theta_2'=1{,}75\ldots$ (нуль полинома $1-z+2z^2-z^3$). Доказательства можно найти в других статьях (РЖМат, 1956, 980, 3614). В. А. Магарик

3616. О трансцендентных числах некоторых классов. Шидловский А. Б., Докл. АН СССР, 1955, 103, № 6, 977—980

Сформулирован ряд теорем о трансцендентности и алгебраической независимости значений E-функций в алгебраических точках. Основной является теорема: Пусть E-функции $f_1(z),\ldots,f_m(z)$ являются решением системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y_k'=Q_{k,0}(z)+\sum_{i=1}^{m}Q_{k,i}(z)y_i,\quad k=1,\ldots,m,$$

$Q_{k,i}(z)$ — рациональные функции от z с алгебраическими числовыми коэффициентами, α — любое алгебраическое число, отличное от нуля и полюсов функций $Q_{k,i}(z)$; l равно m или $m-1$. Для того чтобы l чисел $f_1(\alpha),\ldots,f_l(\alpha)$ были алгебраически независимы, необходимо и достаточно, чтобы функции $f_1(z),\ldots,f_l(z)$ были алгебраически независимы над полем рациональных функций от z. Кроме того, при выполнении последнего условия в случае $l=m-1$ число $f_m(\alpha)$ трансцендентно, если трансцендентна функция $f_m(z)$. Из этой теоремы вытекает трансцендентность значений в любой алгебраической точке $\alpha\neq 0$ функций

$$K_{\lambda,\mu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)(\mu+1)\cdots(\mu+n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n},$$

$$K_{\lambda,\mu,\nu}(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\nu+1)\cdots(\nu+n)}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)(\mu+1)\cdots(\mu+n)}z^n$$

и всех их производных, если λ, μ и ν — любые рациональные числа, причем $\lambda,\mu\neq -1,-2,\ldots$

Далее сформулированы другие теоремы, из которых вытекает трансцендентность значений в любой алгебраической точке $\alpha\neq 0$ следующих функций и всех их производных:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n}{n!(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)(\mu+1)\cdots(\mu+n)}z^{kn}$$

в трех случаях: 1) $\alpha_n=1$, $k=3$; 2) $\alpha_n=(\nu+1)\cdots(\nu+n)$, $k=2$; 3) $\alpha_n=(\nu+1)\cdots(\nu+n)(\eta+1)\cdots(\eta+n)$, $k=1$, где λ, μ, ν и η — рациональные числа, причем $\lambda,\mu\neq -1,-2,\ldots$ И. И. Пятецкий-Шапиро

3617. Тождество для коэффициентов некоторой модулярной формы. Ньюман (An identity for the coefficients of certain modular forms. Newman Morris), J. London Math. Soc., 1955, 30, № 4, 488—493 (англ.)

Рассматриваются коэффициенты степеней модулярной формы Дедекинда

$$\eta(\tau)=x^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)\quad(x=\exp 2\pi i\tau,\ |x|<1).$$

Положив

$$\sum_{n=0}^{\infty}p_r(n)x^n=\prod_{n=1}^{\infty}(1-x^n)^r,$$

с помощью теории эллиптических модулярных функций, автор доказывает теорему: Пусть r — одно из чисел 2, 4, 6, 8, 10, 14, 26; p — простое >3 такое, что $r(p+1)\equiv 0\pmod{24}$; $\Delta=r(p^2-1)/24$. Положим $p_r(\alpha)=0$, если α не является неотрицательным целым. Тогда $p_r(np+\Delta)=(-p)^{r/2-1}p_r(n/p)$. К тому же не существует никаких других значений r, для которых теорема была бы справедливой. Г. А. Ломадзе

3618. Применение кватернионов в теории эллиптических модулярных функций. Шенеберг (Über die Quaternionen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Schoeneberg Bruno), J. reine und angew. Math., 1954, 193, № 1/2, 84—93 (нем.)

Рассматривается алгебра $\mathfrak{S}$ ранга 4 над полем рациональных чисел, превращающаяся при расширении основного поля до поля вещественных чисел в алгебру кватернионов. Предполагается, что $\mathfrak{S}$ содержит подкольцо $\mathfrak{J}$ с целочисленным базисом $\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4$, дискриминант которого равен $-q^2$, где q — простое число. Тогда дифферента $\mathfrak{d}$ кольца $\mathfrak{J}$ является про-

стым идеалом и $\mathfrak{d}^2=(q)$. Пусть $\mathfrak{a}$ — правый идеал кольца $\mathfrak{F}$ и $(\mathfrak{a},\mathfrak{d})=1$.

Для любого $\rho\in\mathfrak{a}$ определяются ряды:

$$\vartheta(\tau,\rho,\mathfrak{a},\mathfrak{d})=\sum_{\mu\equiv\rho(\mathfrak{a}\mathfrak{d})}\exp(2\pi i\tau\mu\mu'/Aq), \qquad (1)$$

где μ' — обозначает кватернион, сопряженный с μ. Если над τ произвести подстановку модулярной группы $\tau'=(a\tau+b)/(c\tau+d)$, a, b, c, d — целые и $ad-bc=\pm 1$, то $\frac{1}{(c\tau+d)^2}\vartheta(\tau',\rho,\mathfrak{a},\mathfrak{d})$ будет линейной комбинацией этих рядов с тем же $\mathfrak{a}$ и $\mathfrak{d}$. При

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}(q)$$

$$\vartheta(\tau',\rho,\mathfrak{a},\mathfrak{d})=\vartheta(\tau,\rho,\mathfrak{a},\mathfrak{d}). \qquad (2)$$

Таким образом, ряды (1) определяют представление фактор-группы модулярной группы по подгруппе преобразований (2). Эта фактор-группа называется модулярной группой по модулю q и обозначается через $\mathfrak{M}(q)$. Гекке определил (Hecke E., Kgl. danske videnskab. selskab. Mat.-fys. medd., 1940, 17, 12) все неприводимые представления $\mathfrak{M}(q)$. Автор определяет, на какие из них разлагается представление, определяемое рядами (1). Кроме нескольких исключительных случаев, которые рассматриваются особо, структура этого представления следующая. Оно разлагается на одно q-мерное, $q-1$ раз повторенное $(q-1)$-мерное и два неэквивалентных между собой $[(q-1)/2]$-мерных неприводимых представления.

Выводится также линейное соотношение между рядами (1) и значениями эллиптической функции $\wp(z)$ в точках, получающихся делением параллелограмма периодов на целое число частей. Из этого соотношения вытекает известная формула для числа классов алгебры $\mathfrak{S}$. Доказывается, что при $q=2$ и 3 ζ-функция алгебры $\mathfrak{S}$ однозначно характеризуется своим функциональным уравнением и разложимостью в ряд Дирихле.

И. Р. Шафаревич

3619. О суммах коэффициентов некоторых модулярных форм. Вальфиш А. З., Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 6, 417—423.

О суммах коэффициентов некоторых модулярных форм. Вальфиш А. З. (ზოგიერთი მოდულარული ფორმის კოეფიციენტების ჯამების შესახებ. ვალ ფიშ ა.), საქ. სსრ მეცნ. აკად. მოამბე, 1955, 16, № 6, 417—423 (груз.)

Пусть $F(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\exp(2\pi in\tau/N)$ — разложение в ряд по степеням $\exp(2\pi in\tau/N)$ произвольной целой модулярной формы размера $-k$, точной ступени N и некоторой системы мультипликаторов, обращающейся в нуль во всех рациональных вершинах фундаментальной области, но не равной тождественно нулю (такую модулярную форму иногда называют нульформой). $C(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}c_n$. Автор (Math. Ann., 1933, 108, 75—90) доказал, что

$$C(x)=\Omega(x^{k/2-1/4}). \qquad (1)$$

В настоящей статье другим методом доказана оценка (1), причем результат более точный, чем прежний, именно доказана теорема: Имеются две последовательности чисел $x_1, x_2, \ldots$ и $y_1, y_2, \ldots$, монотонно возрастающих в бесконечность, и некоторая постоянная $w\neq 0$, зависящая только от нульформы $F(\tau)$, для которых при $n=1, 2, \ldots$ выполнены неравенства

$$x_{n+1}<x_n+a_2x_n^{1/2},\quad y_{n+1}<y_n+y_n^{1/2},$$

$$\operatorname{Re}\{wc(x_n)\}>a_3x_n^{k/2-1/4},\quad \operatorname{Re}\{wc(y_n)\}<-a_3y_n^{k/2-1/4},$$

где a_2 и a_3 — подходящие положительные числа, зависящие только от $F(\tau)$.

Из этой теоремы, в частности, следует оценка (1).

А. П. Лурсманашвили

3620. О суммах модулей коэффициентов некоторых модулярных форм. Вальфиш А. З., Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 7, 497—502

О суммах модулей коэффициентов некоторых модулярных форм. Вальфиш А. З. (ზოგიერთი მოდულარული ფორმის კოეფიციენტთა მოდულების ჯამების შესახებ. ვალ ფიშ ა.), საქ. სსრ მეცნ. აკად. მოამბე, Сообщ. АН ГрузССР, 1955, 16, № 7, 497—502 (груз.)

Пусть $F(\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\exp(2\pi in\tau/N)$ есть разложение в ряд по степеням $\exp(2\pi in\tau/N)$ произвольной целой модулярной формы размера $-k$, точной ступени N и некоторой системы мультипликаторов, обращающейся в нуль во всех рациональных вершинах фундаментальной области, но не равной тождественно нулю. $D(x)=\sum_{1\leqslant n\leqslant x}|c_n|$. Известно (Hecke E., Theorie der Abhandl., Math. Seminar der Univ. Hamburg, 1927, 5, 199—224) $D(x)=O(x^{k/2+1/2})$. В реферируемой статье дается нижняя оценка функции $D(x)$, а именно доказаны теоремы:

1. Для $M\geqslant a_3$

$$\sum_{M<n\leqslant 2M}|c_n|\geqslant a_4M^{k/2+1/4}.$$

Поэтому, если a_5 является наименьшим числом n, для которого $c_n\neq 0$, то $D(x)\geqslant a_6x^{k/2+1/4}$ при $x\geqslant a_5$.

2. Если

$$c_n=O(x^{k/2-1/2+\varepsilon}),\ \text{где } 0<\varepsilon<1, \qquad (1)$$

то для $M\geqslant a_{13}$

$$\sum_{M<n\leqslant 2M}|c_n|\geqslant a_{14}M^{k/2+1/2-\varepsilon}$$

Поэтому, если a_5 является наименьшим числом n, для которого $c_n\neq 0$, то $D(x)\geqslant a_{15}x^{k/2+1/2-\varepsilon}$ при $x\geqslant a_5$.

В этих двух теоремах величины a обозначают подходящие положительные числа, зависящие только от $F(\tau)$. Как следствие получается, что если Q обозначает абсциссу абсолютной сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}c_nn^{-s}$, то $k/2+1/4\leqslant Q\leqslant k/2+1/2$. При этом ряд не сходится абсолютно на прямой $\operatorname{Re}s=k/2+1/4$. В случае справедливости (1) $Q=k/2+1/2$.

А. П. Лурсманашвили

3621. Подход к определению минимальных форм Маркова посредством модулярных функций. Кон (Approach to Markoff's minimal forms through modular functions. Cohn Harvey), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 10—11 (англ.)

См. реф. 3622

3622. Подход к определению минимальных форм Маркова посредством модулярных функций. Кон (Approach to Markoff's minimal forms through modular functions. Cohn Harvey), Ann. Math., 1955, 61, № 1, 1—12 (англ.)

Автор, используя результаты Маркова, Фрике и Фробениуса, доказал следующее. Модулярная группа имеет подгруппу G рода единица, соответствующую фундаментальному «параллелограмму» с рациональными вершинами в верхней полуплоскости, такую, что если A и B — любые порождающие подгруппу G подстановки, то неподвижные точки преобразований A и B суть соответственно корни двух минимальных бинарных форм Маркова. Таким образом определяются все формы Маркова, минимумы которых больше одной трети корня квадратного из дискриминанта. Подстановки, порождающие подгруппу G, характеризуются свой-

ством: $ABA^{-1}B^{-1}$ эквивалентно подстановке $z' = z + 6$. Примеры порождающих подстановок: $z'=(z+1)/(z+2)$, $z' = (z-1)/(-z+2)$, $z' = (3z-1)/z$ и т. д. Фундаментальная область подгруппы G в инвариантной форме определяется как период-параллелограмм u-плоскости для эллиптической модулярной функции

$$1 - J(z) = [\wp'(u)]^2 = 4\wp^3(u) + 1,$$

где $\wp(u)$ — функция Вейерштрасса. Указано также множество классов форм со спектром минимумов, сходящимся к 1/6, корня квадратного из дискриминанта, что, как замечает сам автор, не является полным продолжением спектра Маркова в промежуток от 1/3 до 1/6. Д. С. Горшков

3623. О минимумах квадратичных сопровождающих форм. Малер (On the minima of compound quadratic forms. Mahler Kurt), Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 2, 180—193 (англ.; рез. русс.)

На основании свойств квадратичных форм доказывается ряд теорем, аналогичных теоремам работы автора «Compound Convex Bodies» (статья должна появиться в Proc. London Math. Soc.) и имеющих самостоятельный интерес.

1. Пусть $1 \leqslant p \leqslant n$, $N = \binom{n}{p}$, $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(p)}$ — точки n-мерного пространства R_n, тогда точка $\Xi = [X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X_{(p)}]$ называется их сопровождающей точкой в R_N. N координат точки Ξ являются определителями p-го порядка $n \times p$ матрицы, составленной из координат точек $X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(p)}$. Эти определители берутся в произвольном, но раз навсегда установленном порядке.

2. Вещественной, положительно определенной квадратичной форме

$$F(X) = \sum_{h,k=1}^{n} a_{hk}x_h x_k, \quad a_{hk} = a_{kh}$$

дискриминанта A сопоставляется «p-я сопровождающая форма»

$$\Phi(\Xi) = \sum_{H,K=1}^{N} a_{HK}^{(p)} \xi_H \xi_K$$

дискриминанта $\mathfrak{A}$; $a_{HK}^{(p)}$ равны N^2 определителям p-го порядка матрицы, составленной из коэффициентов a_{hk}. Порядок индексов такой же, как и в 1. Для положительно определенной F, форма Φ будет также положительно определена.

Пусть L_0, Λ_0, — соответственно множества всех точек из R_n и R_N с целыми координатами. $m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_n$; $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_N$ — последовательные минимумы Минковского формы $F(X)$, $X \in L_0$ и $\Phi(\Xi)$, $\Xi \in \Lambda_0$. Используя соотношения

$$A \leqslant m_1 m_2 \ldots m_n \leqslant \Delta(G_n)^{-2} A,$$

$$\mathfrak{A} \leqslant \mu_1 \ldots \mu_N \leqslant \Delta(G_N)^{-2\mathfrak{A}}, \quad \mathfrak{A} = A^P, \quad P = \binom{n-1}{p-1},$$

где $\Delta(G_n)$ — определитель критических решеток n-мерной единичной сферы, доказывается

Теорема 1.

$$\Delta(G_n)^{2P} M_H \leqslant \mu_H \leqslant M_H, \quad H = 1, 2, \ldots, N,$$

где $M_1 \leqslant \ldots \leqslant M_N$ — произведения $m_{\nu_1} m_{\nu_2} \ldots m_{\nu_p}$ $(1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_p \leqslant n)$.

Как следствия вытекают:

Теорема 2.

$$\Delta(G_n)^{2P} m_1^p \leqslant \mu_1 \leqslant \Delta(G_n)^{-2} m_1^{(n-p)/(n-1)}.$$

Теорема 3.

$$\Delta(G_n)^{2N} \leqslant \mu_H \mu^*_{N-H+1} \leqslant \Delta(G_n)^{-2}, \quad H = 1, 2, \ldots, N.$$

Здесь $\mu_1^* \leqslant \ldots \leqslant \mu_N^*$ — последовательные минимумы формы Ψ — $(n-p)$-й сопровождающей формы F. Доказывается аналогичная главной теореме работы «Compound Convex Bodies»

Теорема 4. Пусть K — ограниченное замкнутое, симметричное, выпуклое тело в R_n; $\mathfrak{K}$ — его р-е сопровождающее тело в R_n; $m_1 \leqslant \ldots \leqslant m_n$, $\mu_1 \leqslant \ldots \leqslant \mu_n$, — соответственно, последовательные минимумы тел K в L_0 и $\mathfrak{K}$ в Λ_0. $M_1 \leqslant \ldots \leqslant M_N$ — расположенные в возрастающем порядке произведения $m_{\nu_1} m_{\nu_2} \ldots m_{\nu_p}$ $(1 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \ldots < \nu_p \leqslant n)$, тогда $n^{-p/2}\Delta(G_n)^P M_H \leqslant \mu_H \leqslant (n^p N)^{1/2} M_H$. Э. Е. Симакова

3624. Доказательство теоремы Мейера о неопределенных тернарных квадратичных формах. Джонс, Марш (A proof of a theorem of Meyer on indefinite ternary quadratic forms. Jones Burton W., Marsh Donald), Amer. J. Math., 1955, 77, № 3, 513—525 (англ.)

Дается доказательство известной теоремы Мейера (Meyer A., Zur Theorie der unbestimmten ternären quadratischen Formen, Zürich, 1871). Пусть две целочисленные примитивные неопределенные тернарные квадратичные формы имеют инварианты $\Omega = J$, $\Delta = K$ (Ω есть общий наибольший делитель миноров второго порядка матрицы формы; Δ таково, что $\Omega^2\Delta$ равно определителю матрицы), причем общий наибольший делитель $(J, K) \leqslant 2$, и ни J, ни K не делятся на 4. Тогда, если эти формы принадлежат одному роду, то они эквивалентны, т. е. при таких инвариантах род неопределенных тернарных форм содержит один класс. Авторы в основном придерживаются плана первоначального доказательства Мейера. Применяя современные понятия арифметики квадратичных форм, они исправляют ряд пробелов в доказательстве Мейера и упрощают его во многих деталях. А. В. Малышев

3625. Об одной задаче неоднородной диофантовой аппроксимации. Декомб (Sur un problème d'approximation diophantienne non homogène. Descombes R.), Sémin. P. Dubreil. Fac. sci. Paris, 1954/1955, 8, № 1, 1—11 (франц.)

Пусть $k(\xi, \eta) = \overline{\lim_{u,v}}\, v\,|v\xi - u + \eta|$ (u, v — любые целые, $v > 0$), а $K = \max k(\xi, \eta)$, где максимум распространен на все иррациональные ξ и все действительные η с условием, что $v\xi - u + \eta \neq 0$ для всякой пары целых u, v.

Для константы K были получены следующие оценки: $3/32 \leqslant K$ (Prasad, Proc. London Math. Soc., 1951), $K \leqslant 1/\sqrt{5} = 0{,}447\ldots$ (Хинчин, Math. Ann., 1935), $0{,}352\ldots = 37/10\sqrt{110} \leqslant K \leqslant 2/5 = 0{,}4$ (Poitouet Descombes, C. r. Acad. sci., 1952).

Описывается метод, которым Касселс (РЖМат, 1955, 603) установил, что $K = 27/28\sqrt{7} = 0.3644$, причем этот максимум является «изолированным», т. е. если $k(\xi, \eta) < K$, то $k(\xi, \eta) \leqslant {}^4/_{11} = 0{,}3636\ldots$ Б. Э. Апарисио

3626. Одновременное диофантово приближение (II). Касселс (Simultaneous diophantine approximation (II). Cassels J. W. S.), Proc. London Math. Soc., 1955, 5, № 20, 435—448 (англ.)

Ч. I см. РЖМат, 1956, 149. Доказывается теорема: Существует множество, имеющее мощность континуума,

групп вещественных чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_N$ таких, что

$$r^{1/N} \max_{1 \leqslant n \leqslant N} |r\alpha_n - p_n| \geqslant \gamma_n$$

для всех целых $r > 0$, $p_1, \ldots, p_N$, где $\gamma_N > 0$ зависит только от N. Для $N = 1$ теорема хорошо известна, для $N = 2$ доказана недавно Давенпортом (РЖМат, 1956, 1947) другим методом. Отмечается, что метод автора может дать некоторую оценку для константы γ_N. И. П. Кубилюс

3627. О геометрии чисел. Сантало (On geometry of numbers. Santaló L. A.), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 2, 208—213 (англ.)

Цудзи (Tsuji M., J. Math. Soc. Japan, 1952, 4, 189—193) перенес классические теоремы Минковского и Блихфельда, относящиеся к геометрии чисел, на фуксовы группы. В реферируемой статье эти теоремы переносятся на более общие группы.

Пусть S — пространство точек P, в котором действует транзитивная группа преобразований G; обозначаем sP преобразование точки P с помощью $s \in G$. Пусть G_1 — примитивно-транзитивная подгруппа G; пусть G_1 локально компактна, с той же топологией, что и S; пусть G_1 унимодулярна, т. е. левая инвариантная мера G_1 является правой инвариантной мерой, причем она является инвариантной мерой и для G. Рассмотрим некоторую дискретную подгруппу F группы G и разбиение S на фундаментальные области D_h ($h = 0, 1, 2, \ldots$), причем а) $D_h = x_h D_0$ ($x_h \in F$); б) если $x_h \in F$, то $x_h D_k = D_l$; в) D_h измеримы и имеют одинаковую конечную положительную меру $m(D_h) = m(D_0)$. Доказано следующее обобщение теоремы Блихфельда: Пусть внутри фундаментальной области D_0 фиксированы N точек P_i. Рассмотрим решетку точек $x_h P_i$ ($x_h \in F$, $i = 1, 2, \ldots, N$) и функцию f, заданную на этой решетке, причем $f(x_h P_i) = f(P_i)$. Тогда для любого измеримого множества $H \subset S$ найдутся преобразования $x' \in G_1$ и $x'' \in G_1$, для которых имеют место неравенства

$$\sum_{x_h P_i \in x'H} f(x_h P_i) \leqslant \frac{m(H)}{m(D_0)} \sum_{i=1}^{N} f(P_i) \leqslant \leqslant \sum_{x_h P_i \in x''H} f(x_h P_i),$$

где суммирования слева и справа ведутся по всем точкам нашей решетки с указанными условиями.

Рассмотрим теперь решетку с $N = 1$, т. е. решетку точек $x_h P_0$, где x_h пробегает элементы F, а P_0 — фиксированная точка в D_0. Пусть дана область H, содержащая точку P_0. Подобласть $H^* \subset H$ назовем m-областью H, если для $x \in G$, $y \in G$ выполняются следующие два условия: а) если $xP_0 \in H^*$, то и $x^{-1}P_0 \in H^*$; б) если $xP_0 \in H^*$ и $yP_0 \in H^*$, то $xyP_0 \in H$. Доказано следующее обобщение теоремы Минковского: если область H, содержащая точку P_0, обладает m-областью H^* с условием $m(H^*) > m(D_0)$, то H содержит точку решетки $x_h P_0$ ($x_h \in F$), отличную от P_0.

Доказательство указанных теорем вполне аналогично рассуждениям Блихфельда и Минковского. В случае, когда S — евклидово пространство, G — группа движений, G_1 — группа переносов и F — ее подгруппа, сохраняющая решетку целых точек неизменной, получаются теоремы Блихфельда и Минковского. В случае, когда S — единичный круг комплексной плоскости, $|z| < 1$, G — группа неевклидовых движений, G_1 — группа неевклидовых переносов, F — фуксова группа, получаются упомянутые результаты Цудзи.

А. В. Малышев

3628. Об одной модифицированной форме теоремы Зигеля о среднем значении. Макбит, Роджерс (A modified form of Siegel's mean-value theorem. Macbeath A. M., Rogers C. A.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 4, 565—576 (англ.)

Через Γ обозначается группа всех линейных преобразований пространства R^n, определители которых равны единице. Норма $\|\gamma\|$ любого элемента $\gamma \in \Gamma$ определяется с помощью формулы

$$\|\gamma\| = \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|\gamma x\|.$$

Пусть μ — заданная мера в пространстве Γ, инвариантная (как слева, так и справа) относительно групповых операций в Γ. Для любого конечного или счетного множества $\Delta \subset R^n$ и для любой функции $\rho(x)$ ($x \in R^n$) через $\rho(\Delta)$ обозначается сумма $\sum_{x \in \Delta,\, x \neq 0} \rho(x)$. Предлагается понимать под средним значением суммы $\rho(\Delta)$ предел (если он существует) отношения

$$\int_{\|\gamma\| \leqslant K} \rho(\gamma\Delta)\, d\mu(\gamma) \Big/ \int_{\|\gamma\| \leqslant K} d\mu(\gamma),$$

когда $K \to \infty$. Под сферической плотностью заданного множества $\Delta \subset R^n$ понимается предел (если он существует) отношения $N(r)/V(r)$ при $r \to \infty$, где $N(r)$ — число точек множества Δ в $\overline{S}(0; r)$, а $V(r)$ — объем замкнутой сферы $\overline{S}(0; r)$.

Доказывается теорема: Пусть Δ_0 — дискретное множество со сферической плотностью d. Далее, пусть $\rho(x)$ — функция точки пространства R^n; интегрируемая в смысле Римана, которая обращается в нуль вне некоторой ограниченной области. Тогда

$$\int_{\|\gamma\| \leqslant K} \rho(\gamma\Delta_0)\, d\mu(\gamma) \Big/ \int_{\|\gamma\| \leqslant K} d\mu(\gamma) \to d \int_{R^n} \rho(x)\, dx$$

при $K \to \infty$. Дается применение этой общей теоремы в геометрической теории чисел. Ш. С. Пхакадзе

3629. О покрытии точек решетки выпуклыми областями. Сойер (On the covering of lattice points by convex regions. Sawyer D. B.), Quart. J. Math., 1953, 4, № 16, 284—292 (англ.)

Доказывается, что если центрально симметричная выпуклая фигура K с площадью $A(K)$ при любом положении на плоскости квадратной единичной решетки всегда покрывает по крайней мере одну точку решетки, то $A(K) \geqslant 4/3$. Эта оценка точна, так как область K^*, определяемая в прямоугольных координатах неравенствами $|y| \leqslant 3/4 - x^2$, $|x| \leqslant 1/2$, обладает указанным свойством и имеет площадь 4/3. Д. С. Горшков

3630. Неоднородный минимум для невыпуклых звездных областей с гексагональной симметрией. Бамбах, Роджерс (An inhomogeneous minimum for non-convex star-regions with hexagonal symmetry. Bambah R. P., Rogers K.), Canad. J. Math., 1955, 7, № 3, 337—346 (англ.)

Пусть l_1Ol_4, l_2Ol_5, l_3Ol_6 — три прямые, проходящие через точку O, причем Ol_2 и Ol_3 образуют с Ol_1 соответственно углы 60° и 120°. Определяется (Bambah R. P., Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1951, A 243, 431—462) звездная область $\mathfrak{R}$, как имеющая гексагональную симметрию, если: 1. $\mathfrak{R}$ — симметрична относительно линий l_1Ol_4, l_2Ol_5, l_3Ol_6 и их биссектрис. 2. Граница K области $\mathfrak{R}$ определяется линиями l_1Ol_4, l_2Ol_5, l_3Ol_6 или имеет их асимптотами. 3. Область, внешняя к $\mathfrak{R}$ и лежащая между Ol_1 и Ol_2, выпукла. 4. Каждая из шести ветвей границы K является непрерывной кривой.

Теорема. Пусть область $f(x, y) \leqslant 1$ имеет гексагональную симметрию и α, β, γ, δ — фиксированные

действительные числа причем $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Тогда для любых действительных u_0, v_0 существуют числа $(u, v) \equiv (u_0, v_0) \pmod 1$ такие, что

$$f(\alpha u + \beta v,\ \gamma u + \delta v) \leqslant$$

$$\leqslant \max\left[f\left(\frac{\alpha}{2}, \frac{\gamma}{2}\right), f\left(\frac{\beta}{2}, \frac{\delta}{2}\right), f\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}, \frac{\gamma \pm \delta}{2}\right)\right].$$

Доказательство дано в геометрической формулировке.
Э. Е. Симакова

3631. Диофантовы векторные уравнения. Граммель (Diophantische Vektorgleichungen. Grammel R.), Österr. Ingr-Arch., 1955, **9**, № 2—3, 126—147 (нем.; рез. англ., франц.)

Вектор, начало которого совпадает с началом декартовой прямоугольной системы координат, называется целым, если его конец имеет целочисленные координаты. Для линейных векторных уравнений (например, $[\mathfrak{a}\mathfrak{x}] = \mathfrak{b}$, $\mathfrak{a}\mathfrak{x} = b$, $[\mathfrak{a}[\mathfrak{b}\mathfrak{x}]] = \mathfrak{c}$ и др.) и систем, содержащих только целые векторы и целые числа, ищется решение в целых векторах. Исследование в некоторой своей части является переизложением фактов, известных из теории обыкновенных диофантовых уравнений. Развитый в работе подход позволяет короче формулировать и легче обозревать многие условия и заключения теории обыкновенных диофантовых уравнений.
И. Г. Мельников

3632. О полиномах, неприводимых в конечном поле. II. Утияма (Sur les polynomes irréductibles dans un corps fini. II. Uchiyama Saburô), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 5, 267—269 (франц.)

Обобщение теоремы 2, установленной в первой части (РЖМат, 1955, 4205). Пусть $r + t \geqslant 2$ и $p > \max(r,\ t-1)$, тогда $\pi_q(m;\ r,\ t) = m^{-1}q^{m-r-t} + O(q^{\theta m})$, где $\theta\ (1/2 \leqslant \theta \leqslant 1)$ — постоянная, не зависящая от q и m. Приводится несколько следствий гипотезы Римана для функций L. Легко видеть, что если гипотеза Римана верна, то постоянная θ в обобщенной теореме 2 становится равной $1/2$.
Е. П. Ожигова

3633. Неприводимые множители $f(x^m)$ над конечным полем. Батлер (The irreducible factors of $f(x^m)$ over a finite field. Butler M. C. R.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 480—482 (англ.)

Пусть q — число элементов конечного поля $GF(q)$, $f(x)$ — многочлен, неприводимый над $GF(q)$, m — натуральное число, взаимно простое с q. Рассматривается вопрос о приводимости многочлена $f(x^m)$ над полем $GF(q)$. Определяются степени всех неприводимых множителей $f(x^m)$ и их число.
И. Г. Мельников

3634. Системы линейных сравнений. Батсон, Стюарт (Systems of linear congruences. Butson A. T., Stewart B. M.), Canad. J. Math., 1955, **7**, № 3, 358—368 (англ.)

Вопрос о решении систем линейных уравнений и систем линейных сравнений в целых числах был полностью исследован Стефаном Смитом (Smith H. J. S., Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1861, A 151, 293—326).

В первой части (посвященной классическому случаю) рассматриваются системы линейных уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij} = k_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p \qquad (1)$$

и линейных сравнений

$$\sum_{i=1}^{n} x_i b_{ij} \equiv g_i \pmod{m_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, p \qquad (2)$$

в предположении, что все коэффициенты, постоянные и модули принадлежат некоторому определенному кольцу главных идеалов $\mathfrak{P}$. С помощью обычных соображений арифметики матриц устанавливаются необходимые и достаточные условия существования решений (1) и (2) в $\mathfrak{P}$. Определяется число решений и их форма.

Вторая, основная часть работы посвящена исследованию системы линейных уравнений над множеством целых элементов $\mathfrak{D}$. Множество $\mathfrak{D}$ определяется следующим образом: пусть $\mathfrak{A}$ — ассоциативная алгебра над полем $\mathfrak{F}$ с модулем (главной единицей) ε и $\mathfrak{F}$ содержит кольцо главных идеалов $\mathfrak{P}$. Часть множества $\mathfrak{A}$ называется множеством целых элементов $\mathfrak{D}$, если оно 1) содержит модуль ε, 2) замкнуто относительно сложения, вычитания и умножения, 3) содержит элементы $\varepsilon_1 = \varepsilon, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ такие, что любой элемент $\mathfrak{D}$ единственным образом представляется в виде $\sum a_i \varepsilon_i$, где a_i принадлежит $\mathfrak{P}$.

Так как умножение в $\mathfrak{D}$ может быть антикоммутативным, то рассматривается система

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \chi_i \beta_{ij} = \gamma_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \qquad (3)$$

где α_{ij}, β_{ij} и γ_j — элементы множества $\mathfrak{D}$.

Для системы (3), а также для системы сравнений

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} \chi_i \beta_{ij} \equiv \gamma_j \pmod{\mathfrak{M}_j}, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

где $\mathfrak{M}_j$ — идеал множества $\mathfrak{D}$, устанавливаются необходимые и достаточные условия разрешимости в $\mathfrak{D}$; дается метод решения. В заключение рассматривается пример.
И. Г. Мельников

3635. Свойства полиномов Чебышева относительно сравнений. Банг (Congruence properties of Tchebycheff polynomials. Bang Th. ϕ ger), Math. scand., 1954, **2**, № 2, 327—333 (англ.)

Пусть $T_n(x)$ — n-й полином Чебышева

$$T_n(x) = \sum_m C^{2m}_{|n|} (x^2 - 1)^m x^{|n|-2m},$$

p — нечетное простое число. Рангом вычета $x \pmod p$ называется наименьшее положительное r (доказывается, что оно всегда существует), при котором $T_r(x) \equiv 1 \pmod p$.

Доказываются некоторые свойства полиномов Чебышева, объединенные затем в теорему: существует такое взаимооднозначное соответствие между классами вычетов $\pmod p$ и p различными значениями $\cos(2\pi h/(p+1))$ и $\cos(2\pi k/(p-1))$ (где h и k — произвольные целые), что если x соответствует $\alpha = \cos\xi$, то $T_j(x)$ соответствует $T_j(\alpha) = \cos j\xi$ для любого целого j. Ранг вычета x равен наименьшему положительному d, возможному в равенстве $\xi = 2\pi n/d$, где n и d — целые.

Доказывается также, что ранг x делит $p-1$, если $x^2 - 1$ квадратичный вычет $\pmod p$, и $p+1$, если — невычет (если $x^2 - 1 \equiv 0 \pmod p$), ранг x делит оба эти числа).

Без подробного доказательства сделано замечание, что последовательность полиномов $P_1(x)$, $P_2(x)$, ..., $P_q(x)$ ($q > 2$, P_n — полином n-й степени) в том и только том случае обладает свойством $P_n(P_m(x)) = P_m(P_n(x))$ (при любых n, m), если она задана равенством $P_n(x) = L^{-1}(T_n(L(x)))$ или равенством $P_n(x) = L^{-1}(\{L(x)\}^n)$, где $L(x)$ — полином первой степени.
И. В. Чулановский

3636. Сравнения для обобщенных чисел Белла и Стирлинга. Карлиц (Congruences for generalized Bell and Stirling numbers. Carlitz L.), Duke Math. J., 1955, **22**, № 2, 193—205 (англ.)

Получены сравнения для чисел $\beta(r, s)$ и $\sigma(c, r, s)$, определяемых соотношениями

$$F_s(x) = \sum_{r=1}^{\infty} (x^r / r!)\,\beta(r, s) \qquad (1)$$

и

$$F_{s-1}(uf_s(x)) = \sum_{r=1}^{\infty} (x^r / r!) \sum_{c=1}^{r} u^c \sigma(c, r, s), \qquad (2)$$

где $F_s(x) = F_{s-1}(f(x))$, $F_0(x) = f_0(x)$, а функции $f_0(x)$, $f_1(x), \ldots, f_s(x)$ имеют вид

$$f_i(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{im} x^m / m! \; (i = 0, 1, \ldots, s),$$

где a_{im} — целые рациональные числа и удовлетворяют соотношениям

$$f_i'(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} c_{im} f_i^m(x),$$

где c_{im} — также целые рациональные числа. Типичные результаты для $\beta(r, s)$:

Теорема 2. Пусть n из чисел $a_{0p}, a_{1p}, \ldots, a_{sp}$ кратны простому числу p, а целое число m выбрано таким, что из оставшихся $s+1-n$ чисел a_{ip} не более p^m являются сравнимыми по модулю p; t — наименьшее общее кратное показателей, к которым принадлежат числа a_{ip} по модулю p. Тогда при $z \geqslant 1$ имеет место сравнение

$$\sum_{j=0}^{z} (-1)^{z-j} \binom{z}{j} \beta(r + p^n q^t j + p^n (z-j), s) \equiv 0 \pmod{p^{z_1}},$$

где $q = p^{p^m}$ и $z_1 = [(z+1)/2]$. В частности, при $z = 1$

$$\beta(r + p^n q^t, s) \equiv \beta(r + p^n, s) \pmod{p}.$$

Примечание референта. На стр. 240 в (4.11) опечатка; должно быть

$$\beta(r + p^{n+z} q^t, s) \equiv \beta(r + p^{n+z}, s) \pmod{p^{z+1}}.$$

Г. А. Фрейман

3637. Определитель Майе. Карлиц, Олсон (Maillet's determinant. Carlitz L., Olson F. R.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 2, 265—269 (англ.)

Рассматривается определитель

$$D_p = |R(rs')| \; (r, s = 1, 2, \ldots, (p-1)/2),$$

где p — простое число $\geqslant 3$, s' определяется при $(s, p) = 1$ с помощью соотношения $ss' \equiv 1 \pmod{p}$, символ $R(r)$ обозначает наименьший положительный вычет числа r по модулю p. Вычисляется значение абсолютной величины D_p, которое оказывается не равным нулю и кратным $p^{(p-3)/2}$. Рассматриваются два связанных с D_p определителя и вычисляются их значения.

Примечание референта. Не указано, что $0 \leqslant s' < p$, а это используется в (1.3). Имеются неточности: 1) в (1.5) $p \geqslant 5$ (для $p = 3$ (1,5) имеет смысл, но неверно), в (1.6) $p \geqslant 7$, а было оговорено лишь, что $p \geqslant 3$; 2) (2.6) неверно, если $r = p$, но при этом значении равенство не используется; 3) в (2.9) должно быть $i, j = 0, 1, \ldots, (p-3)/2$; 4) вместо (2.11) должно быть

$$D_p^m = \prod_{j=0}^{(p-3)/2} \sum_{i=0}^{(p-3)/2} \{g^i\} \alpha^{i(2j+1)}.$$

Г. А. Фрейман

3638. Законы появления и повторения простых чисел в кубической рекуррентной последовательности. Уорд (The laws of apparition and repetition of primes in a cubic recurrence. Ward Morgan), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **79**, № 1, 72—90 (англ.)

Пусть

$$(W): \; W_0, W_1, \ldots, W_n, \ldots$$

— целочисленная кубическая рекуррентная последовательность, т. е. при заданных целых W_0, W_1, W_2 имеет место соотношение

$$W_{n+3} = PW_{n+2} - QW_{n+1} + RW_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots,$$

где P, Q и $R \neq 0$ — фиксированные целые числа.

Будем считать, что характеристический полином $f(z) = z^3 - Pz^2 + Qz - R$ имеет различные корни, и назовем последовательность (W) вырождающейся, если какое-нибудь из отношений корней $f(z)$ есть корень из единицы. Пусть p^{w_n} — высшая степень простого числа p, делящая член W_n, причем $w_n = \infty$, если $W_n = 0$. Последовательность $w_0, w_1, w_2, \ldots$ будем называть «функцией вхождения» p в (W) и обозначать через $w(p)$. Дается классификация простых делителей последовательности (W) и в ряде теорем раскрываются законы распределения простых делителей различных типов.

Показывается, что для всех простых чисел p, исключая конечное число их, определение функции вхождения $w(p)$ приводится к специальному случаю, когда для p существует такое взаимно простое с ним целое рациональное число a, что все разности $\alpha - a$, $\beta - a$, $\gamma - a$, где α, β, γ — корни $f(z)$, делятся на p в поле $R_0[\alpha, \beta, \gamma]$, R_0 — поле рациональных чисел.

В конце работы рассматривается последовательность (W), обладающая «особым свойством делимости»: если n делит m, то и W_n делит W_m.

Теорема. Если многочлен $f(z)$ неприводим над полем R_0 и последовательность (W) обладает «особым свойством делимости», то (W) есть вырождающаяся последовательность, причем $W_{n+3} = RW_n$, где R не является точным кубом. И. Г. Мельников

3639. Элементарное доказательство обобщенной теоремы Бонзе. Варшамов Р., Сб. науч. работ студ. Тбилис. ун-та, 1953, 6, 13—19

В 1907 г. Бонзе дал элементарное доказательство неравенства $P_{n+1}^2 < \prod_{k=0}^{n} P_k$ при $n > 4$, где $\{P_k\}$ $(P_0 = 2)$ — возрастающая последовательность простых чисел. Автор дает следующее обобщение названной выше теоремы. Для любого наперед заданного натурального N существует такой номер $n_0 = n_0(N)$, что для любого $n > n_0$ имеет место неравенство: $P_{n+1}^N < \prod_{k=0}^{n} P_k$. Доказательство вполне элементарно и использует формулы конечной комбинаторики и простые оценки сравнительного порядка роста биномиальных коэффициентов и факториала. П. Г. Когония

3640. О некоторых системах диофантовых уравнений. Састри (On some systems of Diophantine equations. Sastry S.), J. Scient. Res. Banaras Hindu Univ., 1954—1955, 5, № 2, 1—6 (англ.)

Теория систем диофантовых уравнений:

$$x_1^j + x_2^j + \ldots + x_n^j = y_1^j + y_2^j + \ldots + y_n^j \; (1 \leqslant j \leqslant k) \qquad (1)$$

в настоящее время еще не разработана. В поисках метода решения систем (1) в целых положительных числах автор находит решения в нескольких частных случаях, уже изученных, и получает некоторые решения для случая, когда $n = 8$, $k = 6$. Например, если пользоваться понятным обозначением, то $[2, 2, 8, 11, 13, 19, 21, 24]_6 = [1, 4, 6, 12, 14, 17, 23, 23]_6$. И. Г. Мельников

3641. Одно из диофантовых уравнений в графическом виде. Андерссон (En diofantisk uppgift i grafisk belysning. Andersson Josef), Elementa, 1955, **38**, № 3, 165—170 (швед.)

Рассматривается система диофантовых уравнений

$$gx_1 + hy_1 = gx_2 + hy_2 = \ldots = gx_r + hy_r,$$

где g и h — натуральные числа. Определяется число решений системы в натуральных числах, удовлетворяющих условиям

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_r;\ y_1 \leqslant x_1;\ y_2 < x_1, \ldots, y_r < x_1,$$

причем y_r может быть также равен нулю. Исследуется вопрос о разыскании k-решений. Под k-решением понимается решение, для которого все разности $x_i - y_i$ делятся на некоторое число $m > 1$ и $y_i < m$. Доказывается, что если $h < g$, то k-решений нет.

В. Д. Подсыпанин

3642. Некоторые критерии делимости чисел Мерсенна и характеры 6-й, 12-й, 24-й и 48-й степеней числа 2. Сторки (Alcuni criteri di divisibilità per i numeri di Mersenne e il carattere 6^{co}, 12^{mo}, 24^{mo}, 48^{mo} dell' intero 2. Storchi Edoardo), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 3, 363—375 (итал.)

Элементарно доказываются теоремы, устанавливающие условия, при которых число 2 есть вычет 2-й, 6-й, 12-й и 24-й или 48-й степеней по данному простому модулю p на основе исследований Вестерна, Каннингема, Айгнера и Вайтмана. Затем выводятся признаки делимости чисел Мерсенна, при простых p и q, например: 1) $2^q - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, если $q = 4k + 3$, $p = 2q + 1$ (теорема Эйлера — Лагранжа) и т. д.

Примечание референта. Теорема 1— доказана в статье Слободского (Матем. в школе, 1953, № 1). Теоремы 1—3 получены референтом в 1937 г. и сообщены АН СССР и Д. Н. Лемеру. В. А. Голубев

3643. Замечание относительно мультипликативных арифметических функций. Маурер (Observaţie asupra funcţiilor aritimetice multiplicative. Maurer I.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, A7, № 7, 360 (рум.)

Пусть a и b — любые целые числа, D — их общий наибольший делитель, M — общее наименьшее кратное. Автор замечает, что при $f(1) = 1$ условие $f(a)f(b) = f(M)f(D)$ эквивалентно обычно применяемому при определении мультипликативных арифметических функций условию $f(a)f(b) = f(ab)$, где a и b — взаимно простые.

А. И. Попов

3644. Число целых неотрицательных решений уравнений $x + 2y + 3z + 4u = m$, $x + 2y + 3z + 4u + 5v = m$. **Игнатьева Р. П.**, Уч. зап. Кабардинск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 8, 45—52

3645. Число целых неотрицательных решений уравнения $x + 2y + 3z + 4u + 5v + 6w = m$. **Игнатьева Р. П.**, Уч. зап. Кабардинск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 8, 53—59

3646 К. О линейных диофантовых приближениях в p-адической области. Луц (Sur les approximations diophantiennes linéaires p-adiques. Lutz Elisabeth (Actual. scient. et industr., № 1224, Publ. Inst. Math. Univ. Strasbourg, 12), Paris, Hermann et Cie éd., 1955, 106 p.) (франц.)

Книга посвящена систематическому изложению и дальнейшему развитию теории, указанной в заглавии. Постановки задач аналогичны постановкам задач обычной теории линейных диофантовых приближений, хотя в методах и результатах есть отличия. Дается большое количество новых определений и доказано много фактов. Во введении дается обзор постановок задач, результатов предшествующих исследований (Малера, Ярника) и перечень оригинальных теорем. Первая глава посвящена понятию рационального p-адического числа, линейному векторному пространству над полем рациональных p-адических чисел; в это пространство вводится мера, инвариантная относительно сдвигов. Вторая глава касается вопросов геометрии чисел и общих теорем теории линейных диофантовых приближений в p-адической области (типа известных лемм Минковского). Метод этой главы — сведение к вопросам обычной геометрии чисел. Третья глава посвящена конструкциям «замечательных» диофантовых приближений, грубо говоря, конструкциям линейных форм, для которых возможны приближения порядка более высокого, нежели порядок, доставленный общими теоремами. В третьей главе дается теорема Кронекера в p-адической области. Четвертая глава посвящена метрическим теоремам теории диофантовых приближений в p-адической области.

А. Г. Постников

3647 К. Фундаментальное «окончательное» доказательство теоремы Ферма для базиса z-совокупности степеней простых чисел. Отт (Fundamentaler «endgültiger» Fermat — Teilbeweis für Resultatsbasis z die «Totalität» der ganzen Primzahlpotenzen Ott Johann Adam. Strengenberg bei Nürnberg: Ott, 1955, 19 Bl., Anh., 10 DM Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 15, 793 (нем.)

3648 Д. Определение индекса поля алгебраических чисел. Сукалло А. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Казанск. ун-т, Казань, 1955

3649 Д. О некоторых проблемах аддитивной теории чисел. Климов Н. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Саратовск. ун-т, Саратов, 1955

3650 Д. О формулах суммирования, подобных формулам Г. Ф. Вороного. Потоцкий В. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ленингр. гос. пед. ин-т, Л., 1955

3651 Д. О некоторых применениях модулярных функций к вопросам квадратической арифметики. Левин Б. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1, 1955

3652 Д. Аддитивные задачи с двумя простыми числами и дополнительными слагаемыми. Виноградов А. И. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Матем. ин-т АН СССР, М., 1955

АЛГЕБРА

МНОГОЧЛЕНЫ И ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

3653. Новое доказательство одной известной формулы. Брауман (Processo novo para obter uma fórmula velha. Braumann Pedro Bruno Teodoro), Ciência (Lisboa), 1954, 4, № 9—10, 68—71 (порт.; рез. нем.)

Для числа разбиений d элементов на j классов выводится формула Мак-Магона

$$a C_j = \sum_{1 \leqslant k \leqslant j} (-1)^{k+j} \left[\sum_{\alpha+\beta+\ldots+\pi=k} \frac{1}{c_1^{\alpha} c_2^{\beta} \ldots c_p^{\pi} \alpha! \beta! \ldots \pi!} \right] d^k,$$

где внутренняя сумма распространяется на все положительные целые c_i, для которых $\alpha c_1 + \beta c_2 + \ldots + \pi c_p = j$.

В. И. Левин

3654. Вывод новой формулы для числа кратчайших решетчатых путей из $(0, 0)$ в (km, kn), имеющих пов-

но t соприкосновений с прямой $my=nx$ и не имеющих точек над этой прямой, и доказательство формулы Гроссмана для числа путей, которые могут касаться, но не проходят выше этой прямой. Бизли (Derivation of a new formula for the number of minimal lattice paths from (0, 0) to (km, kn) having just t contacts with the line $my=nx$ and having no points above this line; and a proof of Grossman's formula for the number of paths which may touch but do not rise above this line. Bizley M. T. L.), J. Inst. Actuar., 1954, 80, 55—62 (англ.)

Обозначим через $\varphi(k, t)$ число решетчатых путей с t контактами, описанных в заглавии, и, следуя Гроссману (Scripta math., 1950, 16, 207—212), положим

$$F_j[j(m+n)]^{-1}\binom{jm+jn}{jm}.$$

Оказывается, что

$$\sum \varphi(k, t)x^k = [1-\exp(-F_1x-F_2x^2-\ldots)]^t.$$

Соответствующая формула для $\varphi_k = \Sigma\varphi(k, t)$,

$$\sum \varphi(k)x^k = \exp(F_1x+F_2x^2+\ldots)-1,$$

эквивалентна формуле Гроссмана доказанной в цитированной выше работе. Рассматриваются различные свойства указанных производящих функций. J. Riordan

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 846.

3655. О многочленах Гурвица. Пароди (Sur les polynomes d'Hurwitz. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 14, 1466—1467 (франц.)

Пусть $f(x)=\Sigma_0^n a_kx^{n-k}$ $(a_k>0)$ и $g(x)=\Sigma_0^n b_kx^{n-k}$ — два вещественных многочлена, из которых первый — гурвицев, и пусть $M_1, \ldots, M_n$ — матрицы, главных миноров определителя Гурвица общего многочлена n-й степени. Показывается, что многочлен $f(x)+\lambda g(x)$ будет гурвицевым при $|\lambda|<\min(a_0/b_0, d_1, \ldots, d_n)$, где $d_k=\dfrac{1}{\delta_k m_k}$, δ_k — сумма абсолютных значений элементов матрицы M_k^{-1} для полинома $f(x)$, а m_k — максимальное абсолютное значение элементов матрицы M_k для полинома $g(x)$. Ссылка на работу Градштейна неточна, следует читать: Изв. АН СССР, отд. техн. н., 1947, № 5, 529—584. В. В. Морозов

3656. Новые доказательства двух теорем Зариского о кратности решения системы k уравнений с k неизвестными. Перрон (Neuer Beweis zweier Sätze von Zariski über die Multiplizität einer Lösung von k Gleichungen mit k Unbekannten. Perron Oskar), Sitzungsber. Math.-naturwiss. Kl. Bayer. Akad. Wiss. München, 1954, (1955), 179—199 (нем.)

Приводятся новые доказательства следующих двух теорем.

1. Если система уравнений

$$F_\nu \equiv \sum_{\mu=r_\nu}^{m_\nu} f_{\nu\mu}(x_1, \ldots, x_k) = 0,$$

$$1 \leqslant r_\nu \leqslant m_\nu \ (\nu = 1, 2, \ldots, k),$$

где каждое $f_{\nu\mu}$ — либо однородный многочлен степени μ, либо 0, имеет конечное число решений, то кратность решения $x_1=0, \ldots, x_k=0$ не меньше числа $N=r_1, r_2, \ldots, r_k$. Если $f_{\nu\mu}$ — многочлены с неопределенными коэффициентами, специализирующимися в поле комплексных чисел, то система уравнений (1) имеет конечное число решений и кратность решения $x_1=0, \ldots, x_k=0$ точно равна N.

2. Если система уравнений (1) имеет конечное число решений, то кратность решения $x_1=0, \ldots, x_k=0$ тогда и только тогда равна N, когда результант

$$R_1 = R\begin{pmatrix} f_{1r_1}, \ldots, f_{kr_k} \\ x_1, \ldots, x_k \end{pmatrix}$$

отличен от нуля.

Впервые эти теоремы были доказаны Зариским (Zariski O., Trans. Amer. Math. Soc., 1937, 41, 249—265).

Е. Г. Шульгейфер

3657. О решении систем алгебраических уравнений. Дервидюэ (Sur la résolution des systèmes d'équations algébriques. Derwidué L.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1955, 24, № 5, 172—188 (франц.)

Излагаются основные сведения по теории систем алгебраических уравнений, знание которых, по мнению автора, необходимо для того, чтобы следить за текущей литературой. Автор ограничивается рассмотрением лишь систем уравнений над полем комплексных чисел. Все изложение построено на методе исключения. Е. Г. Шульгейфер

3658. Некоторые определители, содержащие числа Бернулли и Эйлера высшего порядка. Олсон (Some determinants involving Bernoulli and Euler numbers of higher order. Olson Frank R.), Pacif. J. Math., 1955, 5, № 2, 259—268 (англ.)

Вычисляются определители, элементами которых служат числа Бернулли $B_n^{(z)}$ и Эйлера $E_{2n}^{(z)}$ высших порядков и связанные с ними числа $C_n^{(z)}$ и $D_{2n}^{(z)}$. Эти числа определяются формулами:

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}B_n^{(z)}, \quad \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^z = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\frac{C_n^{(z)}}{2^n},$$

$$\left(\frac{t}{\sin t}\right)^z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n)!}D_{2n}^{(z)} \quad (D_{2n+1}^{(z)}=0),$$

$$\left(\frac{1}{\cos t}\right)^z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n!)}E_{2n}^{(z)} \quad (E_{2n+1}^{(z}=0),$$

где z — любое комплексное число, и являются многочленами от z степени n, старшие коэффициенты которых соответственно равны:

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \ (-1)^n, \ (-1/6)^n\frac{(2n)!}{n!}, \ \frac{(2n)!}{(-2)^n n!}.$$

Доказываются равенства:

$$|B_i^{(a+jd)}| = \prod_{k=0}^{m}\left(-\frac{d}{2}\right)^k k!; \ |C_i^{(a+jd)}| = \prod_{k=0}^{m}(-d)^k k!,$$

$$|D_{2i}^{(a+jd)}| = \prod_{k=0}^{m}\left(-\frac{d}{6}\right)^k (2k)!, \ |E_{2i}^{(a+jd)}| = \prod_{k=0}^{m}\left(-\frac{d}{2}\right)^k (2k)!$$

$(i, j = 0, 1, \ldots, n)$. Полученные результаты прилагаются к выводу некоторых рекуррентных соотношений и вычислению функциональных определителей, элементами которых служат полиномы Бернулли высших порядков, а также ортогональные полиномы Лагерра, Якоби и ультрасферические. А. Г. Школьник

3659. Пары матриц с ненулевым коммутатором. Годдари Шнейдер (Parirs of matrices with a nonzero commutator. Goddard L. S., Schneider H.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 4, 551—553 (англ.)

Над произвольным полем рассматриваются квадратные матрицы A и B соответственно порядков n и m, матрица X ранга r, удовлетворяющая уравнению $AX=XB$, и некоторая $m\times n$ матрица K. Для произвольного многочлена $f(x, y)$ (над тем же полем) дока-

зывается, что характеристические многочлены матриц $f(A, XK)$ и $f(B, KX)$ имеют вид $\theta(\lambda)p(\lambda)$ и $\theta(\lambda)q(\lambda)$, где многочлены $\theta(\lambda)$, $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ имеют степени r, $n-r$ и $m-r$ соответственно, причем многочлены $p(\lambda)$ и $q(\lambda)$ не зависят от K и являются множителями характеристических многочленов матриц $f(A, 0)$ и $f(B, 0)$.

В. Г. Калагастов

3660. Пара матриц, обладающих свойством *P*. **Шнейдер** (A pair of matrices with property *P*. Schneider Hans), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 4, 247—249 (англ.)

Пусть A и B — $n \times n$-матрицы с элементами из некоторого поля K. Доказано, что если $AB = 0$, то характеристический многочлен матричного многочлена $p(A, B)$ без постоянного члена имеет вид

$$|xI \cdot p(A, 0)| \cdot |xI \cdot p(0, B)| / x^n.$$

Если поле K алгебраически замкнуто, то отсюда следует, что пара матриц A и B, для которой $AB = 0$, обладает свойством P (McCoy, Bull. Amer. Math. Soc., 1936, **42**, 592—600).

Как указывает автор, этот результат обобщает результаты Паркера (Parker W. V., Proc. Amer. Math. Soc., 1950, **1**, 464—466) и Перфекта (РЖМат, 1955, 4878).

Х. Р. Сулейманова

3661. Некоторые метрические неравенства в пространстве матриц. **Фань, Гофман** (Some metric inequalities in the space of matrices. Fan Ky, Hoffman A. J.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 1, 111—116 (англ.)

Доказываются следующие три неравенства, справедливые для любой унитарно инвариантной (т. е. не изменяющейся от умножения матрицы на унитарную) нормы в пространстве матриц:

а) пусть матрица A представлена в полярной форме: $A = UH$ (U — унитарная, а H — эрмитова неотрицательно определенная матрица). Тогда для любой унитарной матрицы W имеет место неравенство $\| A - U \| \leqslant \| A - W \| \leqslant \| A + U \|$;

б) для произвольной матрицы A и произвольной эрмитовой матрицы H справедливо неравенство

$$\left\| A - \frac{A + A^*}{2} \right\| \leqslant \| A - H \|;$$

в) пусть H и K — эрмитовы матрицы, а U и V — их преобразования Кэли:

$$U = (H - iE)(H + iE)^{-1},\ V = (K - iE)(K + iE)^{-1}.$$

Тогда $\| U - V \| \leqslant 2 \| H - K \|$.

В. Б. Лидский

3662. Составные матрицы. **Аффиат** (Composite matrices. Afriat S. N.), Quart. J. Math., 1954, **5**, № 18, 81—98 (англ.)

Рассматриваются матрицы A^* порядка m, элементами которых являются матрицы A^*_{ij} порядка n (в терминологии автора, составные матрицы порядка n и степени m с компонентами A^*_{ij}). Каждой такой матрице ставится в соответствие дуальная матрица A_* порядка m и степени n с компонентами A^{rs}_*, (i, j)-м элементом которых является (r, s)-й элемент матрицы A^*_{ij}. Матрицу a, из которой A^* получается путем разбиения на матрицы A^*_{ij}, автор называет основной матрицей для A^*. Составная матрица A^* называется коммутативной, если все ее компоненты A^*_{ij} перестановочны между собой, и дважды коммутативной, если дуальная матрица A_* также коммутативна.

Для коммутативной составной матрицы порядка n и степени m по обычным формальным правилам вводится понятие ее определителя, являющегося матрицей порядка m; определитель этой матрицы m-го порядка называется двукратным определителем матрицы A^*. Если составная матрица A^* коммутативна, то ее компоненты A^*_{ij} имеют общие собственные векторы; числовые матрицы n-го порядка, составленные из соответствующих собственных значений, называются характеристическими дуальными компонентами матрицы A^*; для дважды коммутативной матрицы A^* аналогичным образом определяются характеристические компоненты.

Основные результаты:

1) Основная матрица произведения составных матриц равна произведению их основных матриц; дуальная матрица произведения составных матриц равна произведению их дуальных матриц.

2) Если определитель коммутативной составной матрицы не вырожден, то существует обратная составная матрица; основная матрица обратной матрицы обратна к основной исходной матрице, а ее дуальная матрица обратна к дуальной исходной матрице.

3) Характеристические и характеристические дуальные компоненты дважды коммутативной составной матрицы образуют коммутативное множество матриц.

4) Собственные значения основной матрицы коммутативной составной матрицы являются собственными значениями ее характеристических дуальных компонент с соответствующим образом определенными кратностями.

Это предложение содержит в себе как частный случай один результат Уильямсона (Williamson, Bull. Amer. Math. Soc., 1931, **37**, 585—590).

5) Двукратный определитель коммутативной составной матрицы равен определителю ее основной матрицы.

6) Характеристические компоненты коммутативной составной матрицы A^* являются корнями ее составного характеристического многочлена $|\alpha^* 1^{**} - A^*|$, где α^* — переменная матрица m-го порядка, а 1^{**} — единичная матрица.

7) Коммутативная составная матрица удовлетворяет ее составному характеристическому уравнению: $|\alpha^* 1^{**} - A^*| = 0$.

8) Для характеристических многочленов коммутативных матриц A^*, A_* имеют место разложения

$$|\alpha^* 1^{**} - A^*| = \prod_{\nu=1}^{m} (\alpha^* - \alpha^*_\nu),$$

$$|\alpha_* 1_{**} - A_*| = \prod_{\mu=1}^{m} (\alpha_* - \alpha^\mu_*),$$

где α^*_ν, α^μ_* — соответствующие характеристические компоненты.

Указывается связь этих вопросов с дираковской схемой, в которой некоторые динамические системы рассматриваются как составленные из двух отдельных динамических систем.

М. А. Наймарк

3663. Заметка о строении унитарных и полуунитарных матриц. **Вивье** (Note sur les structures unitaires et paraunitaires. Vivier Marcel), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 10, 1039—1041 (франц.)

Пусть $\mathfrak{A}_n$ — кольцо $n \times n$-матриц над полем комплексных чисел K, I_n — единичная матрица из $\mathfrak{A}_n$ р

$$i^k = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ i_r = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_r \end{pmatrix},\ J_k = i^k - i_r,$$

где $k + r = n$ (без ограничения общности всюду предполагается, что $k \geqslant r$). Совокупность матриц $\Omega \in \mathfrak{A}_n$, удовлетворяющих соотношению $\Omega J_k \Omega^* = J_k$, составляют группу $G(J_k)$ полуунитарных матриц. Две матрицы θ, $\Omega \in \mathfrak{A}_n$ называются внешне эквивалентными, если

$$(\Omega i_r + i\ ) = (\Omega i^k + i_r)\,\theta.$$

Матрица, внешне эквивалентная полуунитарной матрице, унитарна.

Две $k \times r$-матрицы φ и φ_1 называются метрически эквивалентными, если существуют две такие унитарные матрицы σ и τ, что $\varphi = \sigma\varphi_1\tau$. Как было показано в предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 4239), каждая $r \times k$-матрица φ^* метрически эквивалентна своей приведенной матрице, имеющей вид $(0\ U)$, где U — диагональная $r \times r$-матрица, диагональными элементами которой являются действительные неотрицательные числа $u_1, \ldots, u_r$, причем квадраты этих чисел являются корнями уравнения $|\varphi^*\varphi - zI_r| = 0$.

Формулируется теорема: Пусть $\varphi = k \times r$-матрица над полем комплексных чисел K, S_i—сумма квадратов модулей миноров порядка i матрицы φ, ε — произвольное действительное число и δ — модуль определителя матрицы $(I_r + \varepsilon^2\varphi^*\varphi)$. Тогда

$$1 + \sum_1^r \varepsilon^{2i} S_i = \delta = (1 + \varepsilon^2 u_1^2) \ldots (1 + \varepsilon^2 u_r^2).$$

Опираясь на результаты указанной выше работы и пользуясь тем, что каждая полуунитарная матрица внешне эквивалентна унитарной матрице, автор изучает полуунитарные матрицы. Произвольная полуунитарная матрица $\Omega = \left(\begin{array}{c|c} x_{k\times k} & \varphi \\ \hline \xi & y_{r\times r} \end{array}\right) \in G(J_k)$ представима в виде

$$\Omega = \left(\begin{array}{c|c} \sigma_{k\times k} & 0 \\ \hline 0 & Q_{r\times r} \end{array}\right) \psi \left(\begin{array}{c|c} P^*_{k\times k} & 0 \\ \hline 0 & \tau_{r\times r} \end{array}\right),$$

где σ, Q, P, τ — унитарные матрицы, а ψ — ядро матрицы Ω, содержащееся в $G(I_k)$ и получающееся посредством замены в Ω матриц x, φ, ξ, y соответствующими им приведенными матрицами, причем приведенные матрицы для φ^*, x, y, ξ имеют соответственно вид

$$(0\ u),\ \left(\begin{array}{c|c} I_{k-r} & 0 \\ \hline 0 & \sqrt{I_r + u^2} \end{array}\right),\ \sqrt{I_r + u^2},\ (0\ u).$$

В заключение отмечается, что каждая унитарная матрица θ (с точностью до перестановки некоторых ее строк) представима в виде

$$\theta = D_n(M_1^1 D_1)(M_2^2 M_2^1 D_2) \ldots (M_{n-1}^{n-1} M_{n-1}^{n-2} \ldots M_{n-1}^1 D_{n-1}),$$

где D_k — диагональная матрица, первые k диагональных элементов которой имеют вид $e^{i\alpha}$, а остальные равны единице, M_s^l — элементарно ортогональная матрица, получающаяся путем замены в l и $l+1$ строках единичной матрицы I_n клетки I_2 ортогональной клеткой M_s (РЖМат, 1955, 4239). Е. Г. Шульгейфер

3664. О некоторых типах матриц с применением к планированию эксперимента. Окамото (On a certain type of matrices with an application to experimental design. Okamoto Masashi), Osaka Math. J., 1954, 6, № 1, 73—82 (англ.)

Прямоугольная матрица A, не имеющая нулевых строк и столбцов, при помощи перестановок строк и столбцов приводится к квазидиагональному виду, т. е. представляется в виде «прямой суммы»: $A \approx A_1 \dotplus \dotplus A_2 \dotplus \ldots \dotplus A_p$, где все прямоугольные матрицы A_k отличны от нулевой. Если для матрицы A такое разложение (с $p > 1$) невозможно, то матрица A называется смешанной.

Показывается, что квадратная симметрическая матрица A одной и той же перестановкой строк и столбцов может быть представлена в виде

$$A \approx A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_q \dotplus \begin{pmatrix} 0 & P_1 \\ P_1' & 0 \end{pmatrix} \dotplus \ldots \dotplus \begin{pmatrix} 0 & P_s \\ P_s' & 0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

где A_k — смешанные симметрические, а P_l — смешанные прямоугольные матрицы.

Симметрическая матрица $A = \| a_{ik} \|_1^n$ называется матрицей D-типа, если $a_{ik} \geqslant 0$ и $a_{ii} = \Sigma_{j\neq i} a_{ji} > 0$ $(i, k = 1, \ldots, n)$; соответствующая матрице D-типа квадратичная форма неотрицательна. Смешанная D-матрица называется матрицей D_1-типа, если после замены диагональных элементов нулями она остается смешанной; в противном случае называется матрицей D_2-типа.

Доказывается, что D_1-матрица невырождена, а ранг матрицы D_2-типа на единицу меньше ее порядка. Если A есть D-матрица, то в разложении (1) все матрицы A_k являются D-матрицами, $s = 0$, и число компонент A_k типа D_2 равно дефекту матрицы A. Полученные результаты применяются к планированию эксперимента с двойной классификацией и с неравными числами повторений. Ф. Р. Гантмахер

3665. Методы построения некоторых стохастических матриц. II. Перфект (Methods of constructing certain stochastic matrices. II. Perfect Hazel), Duke Math. J., 1955, 22, № 2, 305—311 (англ.)

Как и в предыдущей работе того же автора (РЖМат, 1955, 4878), исследуется задача о достаточных условиях для того, чтобы система действительных чисел была системой характеристических чисел некоторой стохастической матрицы.

Доказано, что действительные числа $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_s$, где $0 \leqslant \lambda_i \leqslant 1$, $-1 \leqslant \mu_i \leqslant 0$, $r + s = n$, являются характеристическими числами стохастической матрицы $(n+1)$-го порядка, если существует такое разбиение системы чисел μ_i на $r+1$ подсистем (некоторые из них или все могут быть и пустыми), что сумма модулей чисел этих подсистем не больше диагональных элементов некоторой стохастической матрицы $(r+1)$-го порядка с характеристическими числами $1, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$. Х. Р. Сулейманова

3666. Обобщенные матрицы. Курепа (Une généralisation des matrices. Kurepa Georges), C. r. Acad. sci., 1954, **239**, № 1, 19—20 (франц.)

Рассматривается упорядоченная пара (A, B) различных или совпадающих множеств (в частности, A и B могут быть упорядоченными множествами, структурами, пространствами и т. д.). Каждую, вообще говоря, многозначную функцию f, определенную на $A \times B$, автор называет матрицей порядка (A, B). В частности, каждую функцию $f(x)$, определенную на множестве A, можно рассматривать как матрицу порядка $(A, 1)$ или порядка $(1, A)$. Для того чтобы иметь возможность сравнивать порядки таких матриц, предлагается в каждом частном случае множества A и B выбирать так, чтобы можно было в некотором смысле говорить об их равенстве или о том, что одно из них больше другого. Например, множества можно сравнивать по их мощностям; если A и B — упорядоченные множества или структуры, то требуется, чтобы одно из них было изоморфно начальной части другого. Равенство матриц, их сумма и произведение определяются естественным образом всякий раз, когда это возможно. Так, например, произведение матриц f и g, порядки которых соответственно имеют вид (A, C) и (C', B) при условии, что в некотором смысле C совпадает с C', есть матрица порядка (A, B), определяемая формулой: $fg(a, b) = f(a, c)\, g(c', b)$, где $f(a, c)\, g(c', b)$ — сумма (быть может интеграл), в которой суммирование происходит по $c \in C$, $c' \in C'$.

В качестве примера использования обобщенных матриц указывается, что интегральное уравнение $u(x) =$

$= f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)\,dt$ можно записать в виде матричного уравнения $u = f + Ku$, где K — матрица порядка $([a,b],[a,b])$, а u и f — матрицы порядка $([a,b],1)$. Доказывается также, что произвольная группа G может быть изоморфно представлена мультипликативной группой матриц порядка (G,G), в каждой строке и в каждом столбце которых имеется одна и только одна единица, а все остальные элементы нули.

Отмечается, что рассмотренные матрицы имеют размерность 2 и что аналогичным образом можно определить матрицы более высокой размерности.

Е. Г. Шульгейфер

ГРУППЫ

3667. О коммутаторах в конечных группах. Хонда (On commutators in finite groups. Honda Kin'ya), Comment. math. Univ., St. Pauli., 1954, 2, № 1, 9—12 (англ.)

Пусть G — конечная группа с единицей e, а $\chi_1, \ldots, \chi_t$ — характеры всех неприводимых представлений группы G над полем комплексных чисел. Элемент $a \in G$ тогда и только тогда является коммутатором, когда $\sum_{i=1}^{t} \frac{\chi_i(a)}{\chi_i(e)} \neq 0$. Отсюда следует, что для любого коммутатора a элемент a^d, где d взаимно просто с порядком элемента a, также является коммутатором.

С. Д. Берман

3668. Конечные группы, являющиеся суммами трех или четырех смежных классов по истинным подгруппам. Курцио (I gruppi finiti che sono somma di tre o quattro laterali di sottogruppi propri. Curzio Mario), Boll. Unione mat. ital., 1955, 10, № 2, 228—232 (итал.)

Скорца (Scorza G., Boll. Unione mat. ital, 1926, 5, 44—46) и Греко (Greco D., Rend. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli, 1951, 18, 74—85) выделили конечные группы, являющиеся суммами трех и четырех своих истинных подгрупп. Обобщая эти результаты, автор доказывает следующие теоремы:

Для того чтобы конечная группа G была суммой трех смежных классов по трем истинным подгруппам (среди которых по крайней мере две различны) необходимо и достаточно, чтобы G, не являясь циклической группой 4-го порядка, содержала подгруппу индекса 2.

Для того чтобы конечная группа G была суммой четырех смежных классов по четырем истинным подгруппам, среди которых не все совпадают, необходимо и достаточно, чтобы G не была циклической группой 4-го или 9-го порядков и содержала подгруппу индекса 2 или 3.

Л. М. Глускин

3669. О произведении конечных групп. Хупперт (Über Produkte von endlichen Gruppen. Huppert Bertram), Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1953/54, 3, 363—364 (нем.)

Автор рассматривает разложение $\mathfrak{G} = \mathfrak{H} \cdot \mathfrak{K}$-конечной группы $\mathfrak{G}$ в произведение двух ее подгрупп $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ и ставит вопрос: в какой степени строение подгрупп $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{K}$ определяет строение группы $\mathfrak{G}$. Перечисляются известные результаты, полученные в этом направлении (Бернсайд, Ф. Холл, Казадио, Редеи, Сеп, Цаппа, Виландт, Ито), а также результаты автора, опубликованные (РЖМат, 1954, 3241) и выходящие из печати в «Math. Z.». К последним относятся следующие: 1) Если группа $\mathfrak{G}$ есть произведение некоторой нильпотентной группы и группы порядка pq (p и q — различные простые числа), то $\mathfrak{G}$ или разрешима, или обладает подгруппой, гомоморфно отображающейся на простую группу порядка 168; 2) Если группа $\mathfrak{H}$ обладает циклическим нормальным делителем простого индекса, то произведение $\mathfrak{H}$ и абелевой группы разрешимо; 3) Коммутант произведения двух абелевых групп является нильпотентной группой (Хупперт, Ито).

С. П. Азлецкий

3670. О главных рядах некоторых конечных групп. Крулль (Über die Hauptreihen gewisser endlicher Gruppen. Krull Wolfgang), Acta Salmanticensia. Ciencias: Sec. Mat., 1954, № 5, 13 (нем.)

Пермутти исследовал алгебраические уравнения со сверхразрешимой группой Галуа (Giorn. Mat. Battaglini (4) 1951, 4(80), 159—185; Wath. Revs., 1953, 14, 8). Автор обобщает и углубляет результаты Пермутти о сверхразрешимости конечных групп в нескольких направлениях. Среди доказанных им теорем отметим следующие: 1) Группа порядка $p^n r$, где p — простое число и $p \equiv 1 \pmod{r}$, сверхразрешима, если содержит инвариантную p-подгруппу Силова с абелевой факторгруппой (случай, когда r — простое число, был рассмотрен Пермутти). 2) Пусть p, q — различные простые числа, причем $q \not\equiv 1 \pmod{p}$, и пусть $s > 1$ — наименьшее целое число, для которого $p^s \equiv 1 \pmod{q}$. Тогда любая группа порядка $p^n q$, где $n < s$, сверхразрешима; при $n \geqslant s$ существуют не сверхразрешимые группы порядка $p^n q$.

W. Lederman

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 851—852.

3671. Об анализе кронекерова произведения неприводимых представлений S_n. Мурнаган (On the analysis of the Kronecker product of irreducible representations of S_n. Murnaghan Francis D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 7, 515—518 (англ.)

Неприводимое представление (μ) симметрической группы S_n степени n называется представлением глубины p (p — целое неотрицательное число, меньшее n), если (μ) соответствует разбиению числа n на целые положительные слагаемые, из которых наибольшее равно $n - p$. Пусть (μ) и (ν) — два неприводимых представления группы S_n, глубины которых равны соответственно p и $q \geqslant p$. Тогда у неприводимых компонент кронекерова произведения $(\mu) \times (\nu)$ наибольшая глубина равна $p + q$, а наименьшая не меньше $q - p$. Указываются типы неприводимых компонент, глубины которых равны соответственно $p+q$, $p+q-1$, $p+q-2$ и $p+q-3$.

В. К. Туркин

3672. О модулярных представлениях симметрической группы. VI. Робинсон, Толби (On the modular representations of the symmetric group. VI. Robinson G. de B., Taulbee O. E.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, 41, № 8, 596—598 (англ.)

Рассматриваются p-диаграммы (p — простое число), входящие в некоторый p-блок симметрической группы S_n; этим p-диаграммам соответствуют неразложимые представления группы S_n, входящие в тот же блок. Пусть все рассматриваемые p-диаграммы расположены в лексикографическом порядке. Указывается (без доказательства), что все эти p-диаграммы получаются из последней путем последовательного применения введенного авторами оператора Y_p. Таким образом при помощи оператора Y_p могут быть получены все неразложимые представления группы S_n, а следовательно, и D-матрица (матрица разложения) этой группы.

В. К. Туркин

3673. О порождении неприводимых представлений симметрической группы. Мурнаган (On the

generation of the irreducible representations of the symmetric group. Murnaghan Francis D.), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 9, 513—515 (англ.)

Указывается метод получения различных неприводимых представлений симметрической группы S_m путем симметризации кронекеровых степеней одного из них. Рассматривается представление группы S_m, получаемое путем разложения этой группы по модулю подгруппы S_{m-1}; в этом представлении характер каждого класса равен числу α_1 единичных циклов в подстановках этого класса. Это представление приводимо и равно сумме единичного представления $\Gamma_{(m)}$ и неприводимого представления Γ с характером $\alpha_1 - 1$. При разложении на слагаемые кронекеровых степеней представления Γ получаются в частности выражения типа $\Gamma \oplus \{1^k\}$ ($k = 1, 2, \ldots, m-1$), относительно которых указывается, что они являются неприводимыми представлениями характеристики $\{m-k, 1^k\}$ и размерности $\binom{m-1}{k}$.

В. К. Туркин

3674. Группы бесконечных перестановок. Маурер (Grupuri de permutări infinite. Maurer I.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 8, 400—408 (рум.; рез. русс., франц.)

Обзор результатов теории групп бесконечных перестановок, полученных различными математиками, в том числе и автором. Основное внимание уделяется бесконечной симметрической группе и группе Гаппара (бесконечной мономиальной группе). Доказываются теоремы относительно нормальных делителей, главных и композиционных рядов и автоморфизмов этих групп. Некоторые доказательства являются новыми.

В. К. Туркин

3675. О представлении конечных абелевых групп коллинеациями. Фракт (Zur Darstellung endlicher Abelscher Gruppen durch Kollineationen. Frucht Robert), Math. Z., 1955, **63**, № 2, 145—155 (нем.)

Рассматриваются представления конечных групп с помощью коллинеаций. При таком представлении каждому элементу G группы соответствует квадратная матрица $M(G)$ с элементами, являющимися действительными или комплексными числами, и определителем, отличным от нуля; если A и B — два (не обязательно различные) элемента группы, то должно иметь место равенство $M(AB) = \lambda_{A,B} M(A) M(B)$, где $\lambda_{A,B}$ — действительное или комплексное число. При представлении группы с помощью коллинеаций любую матрицу $M(G)$ можно умножить на любой числовой множитель, отличный от нуля («перенормировка»). Представление называется существенным, если оно не может быть сведено при помощи перенормировок к представлению той же группы линейными однородными преобразованиями. Преобразование называется точным, если никакому отличному от единицы элементу группы не соответствует скалярная матрица.

Исследуется вопрос о представлениях посредством коллинеаций конечных абелевых групп и групп диэдра. Исследование проводится элементарными методами, без использования общей теории представления конечных групп коллинеациями, разработанной И. Шуром.

Пусть $\mathfrak{A} = \{A_1\} \times \{A_2\} \times \ldots \times \{A_n\}$ — конечная абелева группа; a_i — порядок элемента A_i, причем a_i делится на a_{i+1}. Пусть $\mathfrak{H}$ — группа, порожденная элементами H_i ($i = 1, 2, \ldots, n$), удовлетворяющими соотношениям $H_i^{a_i} = 1$ ($i = 1, 2, \ldots, n$), $H_i C_{jk} = C_{jk} H_i$ ($j < k$; $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$), где $C_{jk} = H_j^{-1} H_k^{-1} H_j H_k$.

Представления группы $\mathfrak{A}$ посредством коллинеаций получаются из линейных однородных представлений группы $\mathfrak{H}$, в которых коммутаторам C_{jk} соответствуют скалярные матрицы; при этом неприводимым представлениям группы $\mathfrak{H}$ соответствуют неприводимые представления группы $\mathfrak{A}$. Группа $\mathfrak{A}$ имеет существенное точное представление посредством коллинеаций с действительными коэффициентами тогда и только тогда, когда $n \geqslant 2$ и a_2 — четное число. Группа диэдра порядка $2n$ имеет существенные представления посредством коллинеаций тогда и только тогда, когда n — четное число. Эти представления могут быть отождествлены посредством перенормировки с некоторыми линейными однородными представлениями группы диэдра порядка $4n$.

В. К. Туркин

3676. Подгруппы свободных метабелевых групп. Головин О. Н., Гольдина Н. П., Матем. сб., 1955, **37**, № 2, 323—336

Взаимным коммутантом (A_α) подгрупп A_α, $\alpha \in \mathfrak{M}$, группы G называется подгруппа, порожденная всеми коммутаторами (g_1, g_2), $g_1 \in A_{\alpha_1}$, $g_2 \in A_{\alpha_2}$, $(\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{M}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2)$. Метабелевым произведением $\Pi^0_\alpha C_\alpha$ групп G_α, $\alpha \in \mathfrak{M}$, называется фактор-группа их свободного произведения $F = \Pi^*_\alpha G_\alpha$ по коммутанту $(F, (G_\alpha))$ (Головин О. Н., Матем. сб., 1951, 28, № 2, 431—444). Метабелево произведение ρ бесконечных циклических групп называется свободной метабелевой группой F_ρ ранга ρ. Число ρ является инвариантом группы F_ρ. Каждая система образующих бесконечных циклических сомножителей метабелева произведения F_ρ называется базой группы F_ρ. Коммутант (F_ρ, F_ρ) свободной метабелевой группы $F_\rho = \Pi^0_\alpha \{a_\alpha\}$ является свободной абелевой группой, базой которой может служить система коммутаторов (a_α, a_β), $\alpha < \beta$.

Система элементов $g_1, \ldots, g_n$ группы G называется линейно зависимой, если существуют такие целые числа $k_1, \ldots, k_n$, не все равные нулю, что $g_1^{k_1} \ldots g_n^{k_n} \in (G, G)$. Максимальные линейно независимые системы элементов группы имеют одинаковую мощность; ее называют линейным рангом группы. Линейный ранг свободной метабелевой группы F_ρ совпадает с рангом ρ. Относительным рангом подгруппы B свободной метабелевой группы F называется максимальное число линейно независимых в F элементов из B. Для свободной метабелевой подгруппы B (ранга выше первого) ее «абсолютный» ранг совпадает с относительным.

Основные результаты работы следующие:

1) В свободной метабелевой группе произвольного ранга система элементов, состоящая не менее чем из двух элементов, линейно независима тогда и только тогда, когда она является базой свободной метабелевой группы.

2) Любая подгруппа B относительного ранга π свободной метабелевой группы F_ρ ранга ρ имеет вид: $B_\pi D$, где B_π — свободная метабелева группа ранга $\pi \leqslant \rho$, D — свободная абелева группа ранга $\rho\sigma \leqslant \frac{1}{2}\rho(\rho-1)$ при ρ конечном и $\sigma \leqslant \rho$ при ρ бесконечном, причем коммутант подгруппы B_π лежит в D, а D лежит в центре группы B.

3) Если π конечно, то любая группа B описанного в 2) вида изоморфна некоторой подгруппе группы F_ϱ.

Таким образом получено полное описание подгрупп свободной метабелевой группы любого конечного ранга. Н. Ф. Сесекин

3677. К теории разрешимых групп без кручения. Плоткин Б. И., Матем. сб., 1955, **36**, № 1, 31—38

Доказывается несколько свойств групп без кручения, локально обладающих конечным или бесконечным возрастающим рядом с абелевыми факторами (такого рода группы автор называет локально нормально разрешимыми) и являющихся R-, R^*- или R^{**}-группами в смысле Конторовича.

Опираясь на результаты А. И. Мальцева (см. А. И. Мальцев «О некоторых классах бесконечных разрешимых групп», Матем. сб., 1951, **28(70)**, 567—588), автор устанавливает влияние на строение локально нормально разрешимой R^{**}-группы предположения о конечности ранга всех ее абелевых подгрупп, а также предположений об обрыве убывающих и возрастающих цепочек ее изолированных подгрупп. Получающиеся результаты для случая локально-нильпотентных групп без кручения совпадают с известными результатами А. И. Мальцева, В. М. Глушкова и Н. Ф. Сесекина.

Для локально нормально разрешимых R-групп с возрастающим инвариантным рядом автор указывает два достаточных условия, при которых этот ряд будет центральным, и доказывает следующее предложение: Если R-группа обладает возрастающим инвариантным рядом, то она обладает максимальным нормальным делителем с возрастающим центральным рядом и является его расширением с помощью абелевой группы без кручения, все рациональные подгруппы (т. е. абелевы подгруппы ранга 1) которой циклические.

Н. В. Черникова

3678. О коммутантах свободных произведений. Гриффитс (A note on commutators in free products. Griffiths H. B.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1954, **50**, Part 2, 178—188 (англ.)

Пусть $G_1, G_2, \ldots$ — произвольные нетривиальные группы. Их неограниченным свободным произведением называется (Higman, J. London Math. Soc., 1952, **27**, 73—81) естественно топологизованная группа K последовательностей $u = \{u_n\}$, где u_n принадлежит свободному произведению $G^{(n)} = G_1 \bigcirc \ldots \bigcirc G_n$, и образ элемента u_{n+1} при естественном гомоморфизме $G^{(n+1)} \to G^{(n}$ совпадает с элементом u_n; произведение элементов группы K определяется покомпонентно. Пусть все группы G_n счетны. Тогда оказывается что коммутант L группы K не замкнут в K и индекс коммутанта L в K континуален. На примере показывается, что коммутант L может быть плотен в K. В группе K определяется подгруппа $P(K)$, состоящая из всех элементов $a = \{a_n\} \in K$, для которых: 1) элемент a_n имеет вид $x_1 x_2 \ldots x_r$, где каждый элемент x_i принадлежит некоторой группе $G_{\sigma(i)}$, $\sigma(i) \leqslant n$; 2) элемент a_{n+1} имеет вид $x_1' x_1 x_2' x_2 \ldots x_r' x_r x_{r+1}'$, где каждый элемент x' принадлежит группе G_{n+1}. Доказывается, что $P(K)$ всегда является собственной неинвариантной подгруппой группы K; индекс нормального замыкания подгруппы $P(K)$ в K континуален. Индекс коммутанта C группы $P(K)$ в группе $P(K)$ также континуален; коммутант C может быть плотным в $P(K)$. М. И. Граев

3679. Порядки линейных групп. Артин (The orders of the linear groups. Artin Emil), Communs Pure and Appl. Math., 1955, **8**, № 3, 355—365 (англ.)

Если $q = p^r$, где p — простое число, $n \geqslant 2$, d — наибольший общий делитель n и $q - 1$, то порядок проективной унимодулярной группы, действующей в n-мерном пространстве над полем из q элементов, равен

$$N(q, n) = \frac{1}{d} q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \ldots (q^2 - 1).$$

Известно, что $N(4,2) = N(5,2) = 60$, $N(2,3) = N(7,2) = 168$, $N(2,4) = N(4,3) = 20160$. Доказывается, что это единственные случаи, когда $N(q_1, n_1)$ совпадает с $N(q, n)$.

Известно, что

$$N(3,2) = \frac{1}{2} 4!;\ N(4,2) = \frac{1}{2} 5!;\ N(5,2) = \frac{1}{2} 5!;$$

$$N(9,2) = \frac{1}{2} 6!;\ N(4,3) = \frac{1}{2} 8!;\ N(2,4) = \frac{1}{2} 8!.$$

Доказывается, что $N(q, n)$ только в этих шести случаях имеет вид $\frac{1}{2} m!$ Д. А. Супруненко

3680. О коммутанте полной линейной группы. Литов (On the commutator subgroup of the general linear group. Litoff O.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, **6**, № 3, 465—470 (англ.)

Как известно, коммутант K полной линейной группы $GL(n, P)$ над полем P обладает следующими свойствами:

1. K порождается множеством всех матриц вида

$$t_{ij} = E_n + \lambda e_{ij},\ i \neq j,\ \lambda \in P.$$

2. K совпадает с унимодулярной подгруппой группы $GL(n, P)$. Автор доказывает, что свойства 1—2 остаются справедливыми, если вместо поля P взять евклидово кольцо или же коммутативное кольцо, множество всех необратимых элементов которого образует идеал. Автор существенно использует одно соотношение Ивасава (Iwasawa K., Proc. Imp. Acad. Tokyo, 1941, **17**, 57—59) и результаты Дьёдонне (Dieudonné, Bull. Soc. math. France, 1943, **71**, 27—45). Д. А. Супруненко

3681. О формальных однопараметрических группах Ли. Лазар (Sur les groupes de Lie formels à un paramètre. Lazard Michel), Bull. Soc. math. France, 1955, № 3, 251—274 (франц.)

Пусть K — произвольное коммутативное ассоциативное кольцо с единицей. Формальный степенной ряд $f(x, y)$ от двух коммутирующих неизвестных x и y с коэффициентами из K называется групповым законом, если $f(x, y) = x + y +$ члены степени выше первой от x и y, и $f(f(x, y), z) = f(x, f(y, z))$. Пусть $G(K)$ — множество таких формальных степенных рядов $\varphi(x)$ от одного неизвестного x с коэффициентами из K, что $\varphi(x) = cx +$ члены степени выше первой, где c — обратимый элемент кольца K. Для любого ряда $\varphi(x) \in G(K)$ существует однозначно определенный формальный ряд $\varphi^{-1}(x) \in G(K)$, для которого $\varphi(\varphi^{-1}(x)) = \varphi^{-1}(\varphi(x)) = x$. Два формальных ряда $f(x, y)$ и $g(x, y)$ без свободных членов с коэффициентами из K называются эквивалентными, если существует такой ряд $\varphi(x) \in G(K)$, что $g(x, y) = \varphi(f(\varphi^{-1}(x), \varphi^{-1}(y)))$. Ряд, эквивалентный групповому закону, также является групповым законом. Групповой закон называется, абелевым, если $f(x, y) = f(y, x)$. В случае, когда кольцо K не имеет отличных от нуля нильпотентных элементов, всякий групповой закон с коэффициентами из K абелев, в противном случае, как показано на примере, возможны и неабелевы групповые законы. Если K является коммутативной, ассоциативной алгеброй с единицей над полем рациональных чисел, то любой абелев групповой закон с коэффициентами из K эквивалентен закону $x + y$.

Абелев групповой закон $F(x, y)$ с коэффициентами из кольца A целочисленных многочленов от счетного множества неизвестных (отличных от x и y) называется универсальным, если любой абелев групповой закон с коэффициентами в произвольном коммутативном ассоциативном кольце K с единицей имеет вид $uF(x, y)$, где u — некоторый гомоморфизм кольца A в кольцо K, переводящий единицу в единицу. Доказывается существование по крайней мере одного универсального закона. Пусть кольцо K имеет простую характеристику p и пусть $f(x, y)$ — произвольный абелев групповой закон с коэффициентами в K. Полагая $g_0(x) = 0$, $g_{n+1}(x) = f(x, g_n(x))$ $(n = 0, 1, \ldots, p-1)$, построим формальный ряд $g_p(x)$. Оказывается, что существует такое натуральное число h, что ряд $g_p(x)$ является формальным рядом от x^{p^h}. Наибольшее из чисел h называется высотой закона $f(x, y)$. Высота может быть и бесконечной (тогда $g_p(x) = 0$). Существуют абелевы групповые законы любой высоты.

Групповые законы с коэффициентами в алгебраически замкнутом поле простой характеристики тогда и только тогда эквивалентны, когда их высоты одинаковы (в этом случае все групповые законы абелевы). В. М. Глушков

3682. Один класс комплексно-аналитических многообразий. Самельсон (A class of complex-analytic manifolds. Samelson H.), Portugaliae math., 1953, **12**, 129—132 (англ.)

Автор доказывает следующий результат, обобщающий одну из теорем Бореля (РЖМат, 1953, 127). Пусть G — компактная группа Ли и T — содержащийся в G тор, для которого размерность фактор-пространства G/T четна. Тогда пространство G/T допускает комплексное строение, инвариантное относительно G. В важнейшем случае, когда группа G полупроста и $T = 1$, эта теорема доказывается следующим образом. Пусть L — алгебра Ли группы G и $\overline{L}$ — ее комплексная оболочка. Используя базис Вейля алгебры $\overline{L}$, автор находит в алгебре $\overline{L}$ такую комплексную подалгебру M, что $\overline{L}$ как действительное векторное пространство разлагается в прямую сумму L и M, а соответствующие подалгебрам L и M подгруппы G и S присоединенной к алгебре L группы G удовлетворяют условию $\overline{G} = G'S$, $G \cap S = 1$. Так как $\overline{G}$ является комплексной группой Ли, а S — комплексной подгруппой группы $\overline{G}$, то пространство $\overline{G}/S$ естественным образом определяется как комплексное многообразие, строение которого инвариантно относительно $\overline{G}$. Посредством гомеоморфного отображения $G/S \to G'$ комплексное строение на $\overline{G}/S$ переносится на G'. Так как группа G локально изоморфна группе G', то в G также определяется комплексное строение, инвариантное относительно G. K. Iwasawa

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 505.

3683. Гомеоморфизмы, сохраняющие меру на группе. Аренс (Homeomorphisms preserving measure in a group. Arens Richard), Ann. Math., 1954, **60**, № 3, 454—457 (англ.)

Доказано, что любой квазисохраняющий меру (т. е. обладающий свойством $dT(x) = cdx$, где dx — инвариантная мера, а c — некоторое положительное число) гомеоморфизм $T(x)$ локально-компактной связной одномерной топологической группы, удовлетворяющей второй аксиоме счетности, имеет вид $T(x) = T(1)A(x)$, где A — автоморфизм группы. М. И. Граев

3684. Об одном классе топологических групп. Шёнеборн (Über eine Klasse von topologischen Gruppen. Schöneborn Heinz), Math. Z., 1955, **61**, № 4, 357—373 (нем.)

Рассматриваются топологические группы, в которых полная система окрестностей нуля состоит из нормальных делителей N_α. Группа A обладает свойством (A), если для любой замкнутой подгруппы B естественное отображение группы A на пространство левых смежных классов по B замкнуто, т. е. отображает замкнутые подгруппы в замкнутые подмножества. Если группа A обладает свойством (A), то для любого замкнутого нормального делителя N и любой замкнутой подгруппы B естественный изоморфизм $B/B \cap N$ на BN/N непрерывен и замкнут. Группа A обладает свойством (0), если в пространство левых смежных классов по любой замкнутой подгруппе B можно ввести единственную топологию, индуцированную некоторой системой открытых подгрупп в A. Если A обладает свойством (0), то различные подфильтры фильтра нормальных делителей (N_α) имеют различные пересечения. Доказывается теорема о силовских подгруппах, являющаяся частным случаем теоремы А. Г. Куроша (Курош А. Г., Изв. АН СССР, 1945, 9, 65—78). Группа A называется линейно компактной, если любой фильтр, состоящий из левых смежных классов по замкнутым подгруппам, имеет непустое пересечение. Если φ — непрерывный гомоморфизм линейно компактной группы A на группу A', то группа A' — линейно компактна, а отображение φ замкнуто. Исследованы связи между подгруппами B, для которых из $B = \bigcap_\alpha B_\alpha$ следует существование конечного числа таких $B_{\alpha_1}, \ldots, B_{\alpha_n}$, что $B = \bigcap_{k=1}^n B_{\alpha k}$ (G-подгруппами), и подгруппами B, для которых существует такой нормальный делитель $N \subset B$, что фактор-группа A/N удовлетворяет условию минимальности (большими подгруппами). Группа A называется локально конечной, если все ее дискретные фактор-группы локально конечны. Если группа A локально-конечна, то локально-конечны ее замкнутые нормальные делители и фактор-группы. Аналогичным образом определяются локально разрешимые, разрешимые, локально специальные и специальные группы, для которых доказаны некоторые теоремы. Например, линейно компактная группа A тогда и только тогда локально специальна, когда она является тихоновским произведением своих различных локально конечных силовских p-подгрупп. Н. Я. Виленкин

3685. Накрывающие группы несвязных топологических групп. Тейлор (Covering groups of nonconnected topological groups. Taylor Robert L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 753—768 (англ.)

Накрытием топологической группы G автор называет пару (E, φ), состоящую из топологической группы E и гомоморфизма φ группы E на группу G, ядро которого дискретно. Топологическая группа G называется односвязной, если ее компонента единицы G_0 односвязна. Накрытие (E, φ) называется односвязным, если E — односвязная группа, и собственным, если $\varphi^{-1}(G_0)$ связно, т. е. если $\varphi^{-1}(G_0) = E_0$. Доказывается, что для произвольной топологической группы G эквивалентны следующие условия: 1) группа G локально односвязна, 2) группа G_0 локально односвязна и открыта в G, 3) группа G_0 допускает собственное односвязное накрытие и открыта в G. Естественным образом определяются гомоморфизм и изоморфизм двух накрытий. Для произвольной локально односвязной группы G определяется фундаментальная группа $\pi = p^{-1}(e)$, где $p: G_0^* \to G_0$ — собственное односвязное накрытие группы G. Пусть $p: G^* \to G$ — собственное односвязное накрытие некоторой связной и локально односвязной группы G. Сопоставив каждому собственному накрытию $\varphi: E \to G$ подгруппу $w^{-1}(e)$ группы π, где $w: G^* \to E$ — естественный гомоморфизм, мы получим есте-

ственное взаимно однозначное соответствие между множествами изоморфных собственных накрытий группы G и множеством всех подгрупп группы π. Далее устанавливается связь между теорией накрытий групп и «продолжениями гомоморфизмов», рассмотренными автором ранее (РЖМат, 1955, 628). Дается классификация собственных накрытий локально односвязных групп, включая критерии существования. Строятся также некоторые примеры. Отметим пример группы G, допускающей собственное односвязное накрытие, но не допускающей собственных накрытий типа ρ для всех подгрупп ρ группы π, и пример группы G, которая не односвязна, не расщепляется по отношению к связной компоненте единицы, но допускает собственное односвязное накрытие. М. И. Граев

3686. О некоторых типах теорем двойственности в топологических группах. Мацусита (Sur quelques types des théorèmes de dualité dans les groupes topologiques. Matsushita Shin-ichi), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 9, 849—854 (франц.)

Пусть G — топологическая группа, $A(G)$ — нормированное коммутативное кольцо с инволюцией, элементами которого являются почти периодические (п. п.) функции на G с обычным умножением и инволюцией $f^* = \overline{f}$, рассматриваемое в топологии равномерной сходимости. Обозначим через $\Phi^0(A(G))$ множество максимальных идеалов кольца $A(G)$, а через $\mathfrak{S}(G)$ — множество таких ограниченных обратимых операторов кольца $A(G)$, что $Sf^* = (Sf)^*$, $S(fg) = S(f)\,S(g)$, $S(1) = 1$. В $\mathfrak{S}(G)$ входят операторы ${}_aS$ и S_a вида ${}_aSf = f(a^{-1}x)$, $S_af = f(xa)$, образующие множества ${}_G\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{S}_G$. Через ${}^0_G\mathfrak{S}$ (соответственно $\mathfrak{S}^0_G$) обозначим множество операторов из $\mathfrak{S}(G)$, коммутирующих с $\mathfrak{S}_G$ (соответственно ${}_G\mathfrak{S}$). Тогда, если группа G максимально почти периодична, то ${}^0_G\mathfrak{S} \cong \Phi^0(A(G)) \cong \mathfrak{S}^0_G$. Таким образом максимально п.п. группа изоморфно и непрерывно отображается во всюду плотную подгруппу компактной группы $\mathfrak{S}^0_G$. Н. Я. Виленкин

3687. Одна теорема о представлении компактных вполне несвязных групп. Лептин (Ein Darstellungssatz für kompakte, total unzusammenhängende Gruppen. Leptin Horst), Arch. Math., 1955, **6**, № 5, 371—373 (нем.)

Доказано, что для каждой бикомпактной вполне несвязной топологической группы G существует поле K и над ним нормальное расширение L/K, группа Галуа которого (с топологией Крулля) топологически изоморфна группе G. З. И. Боревич

3688. Об одном свойстве аддитивной топологической группы действительных чисел. Монна (Sur une propriété du groupe topologique additif des nombres réels. Monna A. F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 3, 295—300; Indagationes math., 1955, **17**, № 3, 295—300 (франц.)

Дано новое доказательство следующей теоремы Бурбаки (Bourbaki N., Topologie générale, Paris, 1947, гл. V, 14): топологическая группа, в которой существует окрестность единичного элемента, гомеоморфная открытому промежутку топологической аддитивной группы действительных чисел R, локально изоморфна группе R. Доказательство основано на рассмотрении меры Хаара в локально компактных топологических группах. Н. Я. Виленкин

3689. Мера Хаара и полугруппа мер на компактной группе. Уэндел (Haar measure and the semigroup of measures on a compact group. Wendel J. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 6, 923—929 (англ.)

Совокупность S нормированных счетно-аддитивных мер на бикомпактной группе G, рассматриваемых как линейные функционалы на $C(G)$, образует бикомпактную в слабой топологии полугруппу относительно свертывания. Каждый идемпотент $\nu \in S$ сосредоточен на некоторой замкнутой подгруппе $H_\nu \subset G$ и является там мерой Хаара. В S существует максимальный идемпотент μ. Так как каждая бикомпактная полугруппа обладает по крайней мере одним идемпотентом $\nu \neq 1$ (Numakura K., Math. J. Okayama Univ., 1952, **1**, № 1—2, 99—108), то $\mu \neq 1$. Устанавливается, что $H_\mu = G$ (чем дается новое доказательство существования инвариантной меры на бикомпактной группе).

Д. А. Райков

3690. Расширение упорядоченной группы целых рациональных чисел с помощью такой же группы. Лонстра (L'extension du groupe ordonné des entiers rationnels par le même groupe. Loonstra F.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 1, 41—49; Indagationes math., 1955, **17**, № 1, 41—49 (франц.)

Построенная Фуксом (Fuchs L., Acta math. Acad. sci. hung., 1950, **1**, 118—124) теория расширений частично упорядоченных групп применяется к случаю, когда расширяемая группа C и расширяющая группа F изоморфны упорядоченной группе целых рациональных чисел. Расширение описывается системой факторов $c_{m,n}$ и множеств $P_{m,n} \subset C$, подчиненных следующим условиям:

(B) $c_{m+n,\,p} + c_{m,\,n} = c_{m,\,n+p} + c_{n,\,p}$.

B′
- (α) множество $P_{m,n}$ состоит из неотрицательных элементов группы C и непусто тогда и только тогда, когда $m \geqslant n$;
- (β) $P_{m,\,n} + P_{n,\,k} \subset P_{m,\,k}$, если $m \geqslant n \geqslant k$.
- (δ) $c_{k,m} + P_{m,n} - c_{k,n} = P_{k+m,\,k+n}$, если $m \geqslant n$.

Выводятся условия, при которых системы $\{c_{m,\,n};\ P_{m,\,n}\}$ и $\{c'_{m,\,n};\ P'_{m,n}\}$ определяют эквивалентные расширения. В. С. Чарин

3691. Структура топологических полугрупп. Уоллес (The structure of topological semigroups. Wallace A. D.), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 2, 95—112 (англ.)

Обзор (без доказательств) различных результатов в теории мобов, т. е. хаусдорфовых пространств, в которых определено непрерывное ассоциативное умножение. Приведены, в частности, следующие результаты. Для любого идемпотента e моба S следующие условия равносильны: 1) Se есть минимальный левый идеал, 2) SeS есть минимальный идеал, 3) eSe есть максимальная подгруппа.

Пусть $H(e)$ — максимальная подгруппа моба S, единицей которой является идемпотент e. Подгруппы $H(e)$, соответствующие различным идемпотентам, не пересекаются. Любая подгруппа моба S содержится в одной из подгрупп $H(e)$. Если S обладает минимальными левым и правым идеалами, то для некоторого множества идемпотентов E' объединение $\bigcup H(e)\,(e \in E')$ является минимальным идеалом. При этом подгруппы $H(e_1)$ и $H(e_2)\,(e_1,\ e_2 \in E')$ топологически изоморфны.

Пусть моб S бикомпактен. Если S имеет единственный идемпотент и $S^2 = S$, то S является группой. Множество $H = \bigcup H(e)$, где сумма взята по всевозможным идемпотентам e, замкнуто. Если S обладает двусторонней единицей, то $S \setminus H$ является максимальным собственным идеалом моба S. Множество P, состоящее из таких элементов x, что $xS = S$, либо пусто, либо совпадает с $\bigcup H(e)\,(e \in E'')$, где E'' — множество левых единиц моба S. Если E'' непусто, то S

обладает двусторонней единицей. Некоторые результаты относятся к замыканиям подмножеств моба S, порожденных одним элементом. Рассматриваются также группы гомологии пространства S. Е. С. Ляпин.

3692. **О топологических полугруппах с односторонними единицами. Шварц Штефан,** Чехосл. матем. ж., 1955, 5, № 2, 153—163 (русс.; рез. англ.)

Пусть в хаусдорфовом бикомпактном топологическом пространстве S определено непрерывное ассоциативное умножение. Если среди собственных левых идеалов полугруппы S имеется такой, который содержит все остальные, то он обозначается через L^*. Идеал L^* является двусторонним идеалом полугруппы S. Пусть пространство S связно. Тогда для существования идеала L^* необходимы и достаточны следующие условия: а) S содержит хотя бы одну правую единицу, в) S обладает левыми идеалами, отличными от S. В этом случае $S \setminus L^*$ — замкнутая полугруппа, не имеющая собственных левых идеалов и распадающаяся на теоретико-множественную сумму попарно непересекающихся замкнутых изоморфных между собою топологических групп. Если $S \setminus L^*$ имеет более одного элемента, то в S существует правая единица.

Строится пример связной полугруппы S, обладающей единственной левой единицей, которая не является правой единицей. Это дает отрицательный ответ на один вопрос, поставленный А. Д. Уоллесом. Часть результатов относится и к некоторым несвязным полугруппам. Е. С. Ляпин

3693. **Простые полугруппы с нулем. Глускин Л. М.,** Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 1, 5—8

Полугруппа G называется простой, если она не имеет иных гомоморфизмов, кроме изоморфизмов и гомоморфизмов на полугруппу, состоящую из одного элемента. Элемент 0 полугруппы G называется нулем, если $0x = x0 = 0$ для любого элемента x и G. Для того чтобы полугруппа с нулем, обладающая более чем двумя элементами, была простой, необходимо и достаточно, чтобы: а) G не имела идеалов, отличных от 0 и G, б) для любых различных элементов a и b полугруппы G существовали элементы x, $y \in G$, для которых выполнено одно и только одно из равенств $xay=0$, $xby = 0$. Среди простых полугрупп имеются особо просто устроенные так называемые вполне простые полугруппы матричного типа. В некоторых классах полугрупп с нулем не имеется простых полугрупп, кроме вполне простых. Примером является класс полугрупп, все элементы которых имеют конечный порядок. Е. С. Ляпин

3694. **Характеры коммутативных полугрупп как функции классов. Шварц Штефан,** Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 4, 291—295 (резюме англ.)

Характером конечной коммутативной полугруппы S называется гомоморфное отображение полугруппы S в мультипликативную полугруппу всех комплексных чисел. Элементы x и y из S называются принадлежащими к одному классу, если $\chi(x) = \chi(y)$ для любого характера χ. Доказывается, что элементы x и y тогда и только тогда принадлежат одному классу, когда в S существуют такие элементы a, e и такие натуральные числа p, q, r, что $ae = a$, $e^2 = e$, $a^r = e$, $x^p = e$, $y^q = e$, $xe = ye = a$. Е. С. Ляпин

3695. **О некоторой связи Галуа в теории характеров полугрупп. Шварц Штефан,** Чехосл. матем. ж., 1954, 4, № 4, 296—313 (резюме англ.)

Пусть S — конечная коммутативная полугруппа и S^* — полугруппа ее характеров (реф. 3694). Для любого идеала $\mathfrak{A}$ полугруппы S обозначим через $\mathfrak{A}_0$ идеал полугруппы S^*, состоящий из всех характеров, равных нулю на $\mathfrak{A}$. Идеал $\mathfrak{A}$ называется замкнутым, если из $x^\rho \in \mathfrak{A}$ $(x \in S)$ следует, что $x \in \mathfrak{A}$. Все идеалы полугруппы S^* замкнуты. Соответствие $\mathfrak{A} \longleftrightarrow \mathfrak{A}_0$ является дуальным изоморфизмом между структурой всех замкнутых идеалов полугруппы S и структурой всех истинных идеалов полугруппы S^*.

Полугруппа характеров произвольного идеала $\mathfrak{A}$ полугруппы S изоморфна полугруппе $S^*/\mathfrak{A}_0$ (получаемой из S^* отождествлением всех элементов из $\mathfrak{A}_0$). Полугруппа характеров полугруппы $S/\mathfrak{A}$, отличных от единичного характера, изоморфна идеалу $\mathfrak{A}_0$. Если $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ — идеалы S и $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}'$, то полугруппа характеров полугруппы $\mathfrak{A}'/\mathfrak{A}$, отличных от единичного характера, изоморфна полугруппе $\mathfrak{A}_0/\mathfrak{A}'_0$. Е. С. Ляпин

3696. **Инвариантные и нормальные подсистемы симметрической системы частичных подстановок. Оганесян В. А.,** Докл. АН АрмССР, 1955, **21**, № 2, 49—56

Частичной подстановкой множества $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется взаимно однозначное отображение некоторого (возможно, пустого) подмножества из M в M. Произведением частичных подстановок x и y называется частичная подстановка, получаемая в результате последовательного применения отображений x и y. Совокупность Σ_n всех частичных подстановок множества M является полугруппой. Рассматриваются различные свойства инвариантных подполугрупп полугруппы Σ_n, т. е. таких подполугрупп $\mathfrak{A} \subset \Sigma_n$, что $S^{-1}\mathfrak{A}\,S = \mathfrak{A}$, для любой подстановки S длины n. Полученные свойства позволяют выявить все инвариантные подполугруппы Σ_n. Доказывается, что полугруппа Σ_n (за исключением случаев $n = 1, 2, 4$, что не оговорено в работе) обладает точно четырьмя нормальными подсистемами, т. е. таким подполугруппами $\mathfrak{N} \subset \Sigma_n$, что для любых x, $y \in \Sigma_n$ и $N \in \mathfrak{N}$ элементы xNy и xy одновременно принадлежат или не принадлежат $\mathfrak{N}$. Е. С. Ляпин

ПОЛЯ, КОЛЬЦА И СТРУКТУРЫ

3697. **Об основной теореме теории Галуа (Случай коммутативных полей). Нинот** (Über den Hauptsatz der Galoisschen Theorie (Kommutative Körper). Ninot Joachim), Arch. Math., 1954, 6, № 1, 52—54 (нем.)

С помощью понятий и результатов линейной алгебры просто доказывается основная теорема теории Галуа. Б. М. Уразбаев

3698. **Об определении тела. Демария** (Sulla definizione di corpo. Demaria D. Carlo), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis. mat. e natur., 1955, **18**, № 3, 268—274 (итал.)

Исследуется вопрос о минимальных требованиях, которые надо наложить на множество с двумя определенными в нем операциями для того, чтобы оно было телом. Основной результат:

Множество C является телом, если в нем определены две операции, сложение и умножение, удовлетворяющие следующим условиям: 1, 2) множество C замкнуто относительно сложения и относительно умножения; 3) умножение ассоциативно; 4, 5) существует по меньшей мере один такой элемент 0 (нуль), что $0 + 0 = 0$; $0 \cdot 0 = 0$; 6) в множестве $C \setminus 0$, получаемом исключением нуля из множества C, имеется по меньшей мере одна левая единица u: $ux = x$, $x \in C \setminus 0$; 7) для любого элемента $x \in C \setminus 0$ существует по меньшей мере один левый обратный элемент $x^{-1} \in C$; 8) в множестве C есть хотя бы один такой элемент $-u$, что $-u + u = 0$; 9) $0 + u = u$; 10) имеет место квазидистрибутивный закон:

$y(x + u) = yx + y$; $(u + x)\,y = y + xy$; $x \in C$; $y \in C \setminus 0$;

11) сложение квазиассоциативно: $u+(x+y)=(u+x)+y$, $x, y \in C$ 0.

Показано, что каждый из вышеперечисленных постулатов независим от всех остальных.

Доказательство основной теоремы базируется на нескольких леммах, одна из которых — такова: множество C есть тело, если удовлетворены следующие условия: 1) C — аддитивная группа; 2) $C \setminus 0$ — мультипликативная группа: 3) для любых $x, y \in C$ имеет место равенство:

$$y(x+u)=yx+yu; \quad (x+u)y=xy+uy$$

(u — единица мультипликативной группы $C \setminus 0$).

Г. Б. Гуревич

3699. Длины цепей простых идеалов. Коэн (Lengths of prime ideal chains. Cohen I. S.), Amer. J. Math., 1954, **76**, № 3, 654—668 (англ.)

Глубиной $d(p)$ и высотой $h(p)$ простого идеала p коммутативного кольца R с единицей автор называет максимальные длины цепей простых идеалов кольца R, начинающихся с p или соответственно кончающихся на p. Если S — надкольцо R, P — простой идеал в S и $p=P \cap R$, то R-размерностью идеала P называется число $\dim P/R$, равное степени трансцендентности $(S/P : R/p)$. Доказываются следующие теоремы:

Пусть D — совокупность областей целостности, удовлетворяющая условиям: а) из $A \in D$ следует $A/q \in D$ для любого простого идеала q кольца A; б) если $A \in D$, то кольцо многочленов $A[X]$ также принадлежит D; в) если $A \in D$ и q — минимальный простой идеал в A, то $A[X]\,q$ есть минимальный простой идеал в $A[X]$.

Тогда для любого кольца $R \in D$ и любого надкольца $S \supset R$ имеет место неравенство

$$h(P)+(\overline{S} : \overline{R}) \leqslant h(p)+(S : R), \qquad (1)$$

где $p=P \cap R$, $\overline{S}=S/P$, $\overline{R}=R/p$. В частности, неравенство (1) справедливо для любого нетеровского кольца R. При тех же условиях а), б), в) имеет место неравенство

$$d(P) \leqslant d(p)+\dim P/R. \qquad (2)$$

На примере показывается, что условия а), б), в) существенны для справедливости неравенства (1). Если кольцо R — нетеровское, а S порождается над R конечным числом элементов, то в неравенстве (2) правая часть может превосходить левую не более чем на единицу. Для гильбертова кольца R в (2) имеет место равенство.

Разность между правой и левой частями неравенства (1) автор называет дефектом идеала P относительно кольца R. Именно введением этого термина объясняется отступление автора от обычной терминологии, в которой числа $d(p)$ и $h(p)$ называются соответственно размерностью и дефектом размерности идеала p.

А. И. Узков

3700. Краткое доказательство существования полей коэффициентов полных локальных колец в случае равных характеристик. Геддес (A short proof of the existence of coefficient fields for complete, equicharacteristic local rings. Geddes A.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, № 3, 334—341 (англ.)

Излагается новое доказательство несколько обобщенной теоремы Коина о существовании поля коэффициентов полного локального кольца R, характеристика которого совпадает с характеристикой поля вычетов $R/\mathfrak{p}$, где $\mathfrak{p}$ — максимальный идеал в R (Cohen I. S., Trans. Amer. Math. Soc., 1946, **59**, 54—106).

Автор называет коммутативное кольцо R с единицей слабо локальным, если в R существует единственный максимальный идеал $\mathfrak{p}$, причем $\bigcap_{i=0}^{\infty} \mathfrak{p}^i=(0)$. В частности, если при некотором ρ будет $\mathfrak{p}^\rho=(0)$, то кольцо называется слабо примарным. Наименьшее значение ρ, при котором $\mathfrak{p}^\rho=(0)$, называется показателем слабо примарного кольца R. Для слабо локальных колец вводится топология и определяется понятие поля коэффициентов точно так же, как и для локальных колец. Доказываются следующие леммы:

1. Если R — слабо примарное кольцо показателя 2, имеющее, как и его поле вычетов $R/\mathfrak{p}$ характеристику нуль, то подполе кольца R является полем коэффициентов в том и только в том случае, когда оно будет максимальным подполем в R.

2. Если R — слабо примарное кольцо показателя 2, имеющее как и его поле вычетов $R \setminus \mathfrak{p}$ характеристику $p \neq 0$, то: а) совокупность R^p p-х степеней элементов из R является полем; б) подполе кольца R является полем коэффициентов в том и только в том случае, когда оно содержит R^p и является максимальным подполем в R.

3. Пусть R — слабо примарное кольцо, характеристика которого равна характеристике $R/\mathfrak{p}$, и пусть показатель R равен $\rho \geqslant 2$. Тогда для любого подполя F' слабо примарного кольца $R'=R/\mathfrak{p}^{\rho-1}$ существует подполе F кольца R, изоморфно отображающееся на F' при естественном гомоморфизме R на R'.

Существование полей коэффициентов для слабо примарных колец в случае равных характеристик следует из этих лемм непосредственно. Теорема для полного слабо локального кольца R получается с помощью изоморфного вложения R в бесконечную прямую сумму $R/\mathfrak{p}+R/\mathfrak{p}^2+R/\mathfrak{p}^3+\ldots$.

А. И. Узков

3701. Простые подалгебры конечного ранга кольца всех непрерывных линейных преобразований. Розенберг (Finite-dimensional simple subalgebras of the ring of all continuous linear transformations. Rosenberg Alex), Math. Z., 1954, **61**, № 2, 150—159 (англ.)

Левое и правое векторные пространства M и N над телом D называются двойственными, если существует невырожденная билинейная функция (x, f), переводящая $M \times N$ в D. Аннулятором подпространства K из M называется множество K' всех таких векторов f из N, что $(K, f)=0$. Аналогично определяется аннулятор L' подпространства L из N. Подпространство K из M называется замкнутым, если $K''=K$. Замыкание подпространств в этом смысле совпадает с замыканием в N-топологии пространства M (окрестностями элемента x в M являются смежные классы $x+F'$, где F — некоторое подпространство конечной размерности в N). В работе изучаются простые подалгебры конечного ранга (над центром тела D) кольца $L(M, N)$ всех непрерывных (в N-топологии) линейных преобразований пространства M.

Доказывается, что централизатор такой подалгебры изоморфен кольцу $L(P, Q)$, где P и Q — двойственные пространства над некоторым телом; централизатор централизатора совпадает с исходной подалгеброй. Если пространства M и N имеют счетную размерность, то любой изоморфизм двух простых подалгебр конечного ранга может быть продолжен до внутреннего изоморфизма кольца $L(M, N)$. Если же D — алгебраически замкнутое поле, то изоморфизм двух простых подалгебр конечного ранга тогда и только тогда может быть продолжен до внутреннего изоморфизма кольца $L(M, N)$, когда централизаторы этих подалгебр изоморфны. Для этого же случая дается описание всех подалгебр, централизаторы которых являются подалгебрами конечного ранга.

В. А. Андрунакиевич

3702. Теорема Веддерборна, слабо нормальные кольца и полугруппа классов колец. **Накаяма** (Wedderburn's theorem, weakly normal rings, and the semigroup of ring-classes. Nakayama Tadasi), J. Math. Soc. Japan, 1953, 5, № 2, 154—170 (англ.)

Дается обобщение теоремы Веддерборна о выделении прямым множителем простой центральной алгебры конечного ранга. Роль основного поля выполняет произвольное кольцо C с единицей. Вводится понятие внутренней слабой нормальности (в. с. н.) кольца A над C, содержащее, в частности, требования существования конечного правого независимого базиса кольца A над C и совпадения единиц колец A и C. Если C — поле, лежащее в центре кольца A, то в. с. н. совпадает с простотой и центральностью. Если кольцо C коммутативно и лежит в центре кольца A, то условие в. с. н. совпадает с условием максимальной центральности, введенном автором и Азумайя (Azumaya G., Nagoya Math. J., 1951, 2, 119—150). Обобщение теоремы Веддерборна состоит в следующем:

Пусть кольцо A в. с. н. над C. Если кольцо S содержит кольцо A, причем единицы этих колец совпадают и центр кольца A содержится в центре кольца S, то кольцо A выделяется прямым множителем над C, точнее $S = A \times_C B$, где $B = V_S(V_A(C))$; ($V_K(L)$ — коммутатор подкольца L в кольце K). Кольцо S будет при этом в. с. н. над своим подкольцом B.

Для коммутативного кольца C строится аналог группы Брауэра (см. указанную выше работу Азумайя). Все кольца, содержащие кольцо C в своем центре, имеющие общую с ним единицу и обладающие конечным независимым базисом над C, образуют подгруппу $\mathfrak{R}_1(C)$ по отношению к операции взятия прямого произведения над C. Содержащиеся в $\mathfrak{R}_1(C)$ в. с. н. над C кольца образуют подполугруппу $\mathfrak{R}_3(C)$, в которой содержится еще более узкий класс $\mathfrak{R}_4(C)$, состоящий из полных колец матриц конечного порядка над C. Фактор-полугруппа $\mathfrak{R}_3(C)/\mathfrak{R}_4(C)$ является группой. Доказывается, что если фактор-кольцо кольца C по его радикалу удовлетворяет условию минимальности, то группа $\mathfrak{R}_3(C)/\mathfrak{R}_4(C)$, является максимальной подгруппой в полугруппе $\mathfrak{R}_1(C)/\mathfrak{R}_4(C)$.

В заключение дается очень простое доказательство теоремы, обратной теореме Веддерборна: если алгебра A с единицей выделяется прямым множителем из любой алгебры S, содержащей A и имеющей с ней общую единицу, то A — простая центральная алгебра конечного ранга. Автор указывает, что эта теорема сообщена ему Н. Джекобсоном. В. М. Курочкин

3703. Геометрическое доказательство двух структурных теорем теории колец. **Седе** (Két gyürüelméleti struktúratétel geometriái bizonyitása. Szele Tibor), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 1, 49—85 (венг.)

Простые доказательства структурных теорем Веддерборна-Артина.

3704. Внутренние эндоморфизмы ассоциативной алгебры. **Хаттори** (Inner endomorphisms of an associative algebra. Hattori Akira), J. Math. Soc. Japan, 1954, 6, № 1, 40—44 (англ.)

Рассматривается ассоциативная алгебра A с единицей конечного ранга n над полем K. Пусть $S = \sum_{i=1}^{n} X_i u_i$, где $X_1, \ldots, X_n$ — независимые переменные над K и $u_1, \ldots, u_n$ — базис алгебры A. Внутренний автоморфизм $b \to SbS^{-1}$ в базисе $u_1, \ldots, u_n$ задается матрицей $R_u(S) = (R_{ij}(X))$, где $R_{ij}(X) \in K_0 = K(X_1, \ldots, X_n)$. Элемент $a = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i u_i$ алгебры A называется полурегулярным, если функцию $R_{ij}(X)$ можно представить в виде дроби

$$R_{ij}(X) = P_{ij}(X)/Q_{ij}(X),\ P_{ij} \text{ и } Q_{ij} \in K[X_1, \ldots, X_n],$$

у которой знаменатель Q_{ij} не обращается в нуль при специализации $X_1 = \alpha_1, \ldots, X_n = \alpha_n$. Эндоморфизм алгебры A, возникающий из внутреннего автоморфизма $b \to SbS^{-1}$ при этой специализации, называется внутренним эндоморфизмом. Работа посвящена изучению свойств внутренних эндоморфизмов в связи с некоторыми свойствами полурегулярных элементов.

Л. Я. Окунев

3705. Алгебры Ли произвольной характеристики. **Лавендомм** (Les algèbres de Lie de caractéristique quelconque. Lavendhomme R.), Ann. Soc. scient. Bruxelles, 1954, sér. 1, 68, № 3, 133—139 (франц.)

Рассматриваются конечномерные алгебры Ли над любым коммутативным полем K. На такие алгебры обычным способом переносятся определения разрешимости и полупростоты, а также теоремы о существовании общего собственного вектора у всех преобразований линейной разрешимой алгебры Ли (в случае, когда поле K алгебраически замкнуто) и о разложении полупростой алгебры в прямую сумму простых алгебр.

В. М. Глушков

3706. Неассоциативные свободные суммы алгебр. **Курош А. Г.,** Матем. сб., 1955, **37**, № 2, 251—264

Развивая метод Витта (РЖМат, 1954, 2531), автор дает новые более простые доказательства своих теорем о подалгебрах неассоциативных свободных сумм произвольных алгебр, о существовании изоморфных продолжений любых двух свободных разложений произвольной алгебры и доказанной референтом теоремы о свободных разложениях алгебр с конечным числом образующих. Принятый ранее термин «свободное произведение» автор заменяет более удачным, по его мнению, термином «свободная сумма». Путем соответствующего изменения конструкции получаются свободные алгебры с единицей и свободные суммы алгебр с единицей, по отношению к которым остаются в силе все перечисленные выше теоремы.

Если на неассоциативную свободную сумму алгебр A_α наложить дополнительные соотношения, состоящие в ассоциативности произведений элементов различных алгебр A_α, то получится ассоциативная свободная сумма алгебр A_α. Наложение на последнюю соотношений перестановочности элементов различных алгебр A_α приводит к ассоциативно-коммутативной свободной сумме алгебр A_α. Доказывается, что алгебра, разложимая в неассоциативную свободную сумму, неразложима ни в ассоциативную, ни в ассоциативно-коммутативную свободную сумму, ни в прямую сумму.

А. И. Жуков

3707. Дифференциальные идеалы. **Мид** (Differential ideals. Mead D. G.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 420—432 (англ.)

Реферируемая работа продолжает исследования Леви (Levi H., Trans. Amer. Math. Soc., 1942, 51, 532—568) об условиях принадлежности дифференциальных мономов некоторым замечательным дифференциальным идеалам. Пусть F — дифференциальное поле нулевой характеристики, $[uv]$ и $[y^2]$ — дифференциальные идеалы в кольцах дифференциальных полиномов $F\{u, v\}$ и $F\{y\}$, порожденные соответственно элементами uv и y^2. Через u_i, v_i, y_i обозначим i-е производные элементов u, v, y ($i = 0, 1, 2, \ldots$; $u_0 = u$, $v_0 = v$, $y_0 = y$). Рассмотрим дифференциальный моном $P = y_{i_1} \ldots y_{i_n}$ кольца $F\{y\}$, у которого i_j монотонно возрастает с ростом j. Последовательность $(a_1, \ldots, a_n)$, где $a_j = (i_1 + i_2 + \ldots + i_j) - j(j-1)$ $(j = 1, \ldots, n)$, называется весовой по-

следовательностью этого монома. Доказывается, что моном P, весовая последовательность которого состоит только из нулей, единиц и двоек, тогда и только тогда содержится в идеале $[y^2]$, когда в этой последовательности встречается по крайней мере одна из следующих комбинаций чисел: 1,2,2,1; 1,2,2,2,2,0; 0,2,2,2,2,1; 0,2,2,2,2,2,2,0. Для мономов в кольце $F\{u, v\}$ имеет место утверждение: $u^s u_{i_1} u_{i_2} \dots$ $\dots u_{i_n} (v_s)^r \notin [uv]$, если $r \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_n$. В. М. Глушков

3708. Радикал почти колец. Дескинс (A radical for near-rings. Deskins W. E.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 5, 825—827 (англ.)

Пусть N — почти кольцо, удовлетворяющее условию минимальности для правых модулей (РЖМат, 1954, 5475), $\mathfrak{P}$ — множество всех идеалов P почти кольца N, которые не содержат отличных от нуля идемпотентов, но имеют по меньшей мере один отличный от нуля элемент, аннулирующий слева все идемпотенты из N, и T — сумма всех идеалов $P \in \mathfrak{P}$. (Если $\mathfrak{P}$ пусто, то T является по определению нулевым идеалом.) Для любого минимального правого модуля M почти кольца $N_1 = N/T$ обозначим через $r(M)$ — идеал, состоящий из всех элементов почти кольца N_1, аннулирующих справа модуль M. Пусть S — пересечение всех идеалов $r(M)$ и пусть $\bar{N} = N_1/S$. Ядро естественного гомоморфизма $\sigma: N \to \bar{N}$ называется радикалом R кольца N. Почти кольцо N/R полупросто в смысле Блэккета (т. е. не содержит нильпотентных правых модулей). Почти кольцо N полупросто тогда и только тогда, когда $R = 0$. Если N — кольцо, то R совпадает с классическим радикалом. В. А. Андрунакиевич

3709. Понятие метрики. Жаффар (La notion de valuation. Jaffard Paul), Enseign. math., 1951—1954 (1955), 40, 5—26 (франц.)

Обзор без доказательств или с намеками на доказательства ряда фактов теории метрик в полях и кольцах. Рассматриваются следующие вопросы: общие понятия, связанные с метриками (архимедовость, кольцо и идеал метрики и т. д.); примеры метрик в теории алгебраических чисел и функций; полные поля с дискретной метрикой и их арифметика; локальная теория полей классов и ее обобщение на неабелевы поля. Основную часть обзора занимает изложение, с точки зрения метрик, теории идеалов целозамкнутых колец и ее обобщение на случай, когда значение метрики принадлежит не полностью упорядоченной группе. В конце рассматривается связь с теорией топологических полей и излагаются метризационные теоремы. И. Р. Шафаревич

3710. Об упорядоченных кольцах вещественных векторов. Ван Ши-цян (賓向量所成的有序環. 王世強), 數學學報 (Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica), 1955, 5, № 1, 65—80 (кит.; резюме англ.)

Дается положительный ответ на следующий вопрос, поставленный Биркгофом (Теория структур, М., 1952, проблема 103):

Пусть G — лексикографически упорядоченная прямая сумма двух аддитивных групп действительных чисел. Спрашивается, может ли упорядоченная таким образом группа G быть превращена в упорядоченное кольцо. Доказано, что группа G по крайней мере шестью способами может быть превращена в упорядоченное кольцо. Соответствующие умножения определяются формулами:

1) $(a, b)(c, d) = (0, 0)$,
2) $(a, b)(c, d) = (0, ac)$,
3) $(a, b)(c, d) = (ac, 0)$,
4) $(a, b)(c, d) = (ac, bc)$,
5) $(a, b)(c, d) = (ac, ad)$,
6) $(a, b)(c, d) = (ac, ad + bc)$.

Все получающиеся таким образом упорядоченные кольца между собой не изоморфны. Существуют ли другие кольца, не изоморфные любому из этих колец, неизвестно. Лю Шао-сюэ

3711. Алгебра отношений упорядоченности. Куэста (Algebra ordinal. Cuesta N.), Rev. Real. acad. cient. exact. fis. y natur. Madrid, 1954, 48, № 2, 103—145 (исп.)

Множество M называется множеством с отношением, если в нем задано некоторое бинарное отношение $\&$. Элемент $a \in M$ называется рефлексивным, если $a \,\&\, a$. Множества с транзитивным отношением, в которых существуют как рефлексивные так и нерефлексивные элементы, сводятся к множествам, все элементы которых рефлексивны, т. е. к частично упорядоченным множествам (ч. у. м.) с отношением $\geqslant$. Множества без рефлексивных элементов совпадают с ч. у. м. с отношением $>$. Основная часть работы посвящена исследованию ч. у. м. Доказано, что для любого кардинального числа K существует ч. у. м. мощности 2^K, которое для любого ч. у. м. M мощности K содержит подмножество, изоморфное M.

Подмножество A ч. у. м. M называется начальным (конечным) отрезком в M, если из $a \in M$, $m \in M$, $m < a$ $(m > a)$ следует, что $m \in A$. Сечением ч. у. м. M называется пара множеств (A, B), где A является начальным и B конечным отрезком в M и $A < B$ (т. е. $a < b$, для любых $a \in A$, $b \in B$).

Пусть ч. у. м. $M \cup p$ получается из ч. у. м. M присоединением элемента p. Тогда в множестве M определяется сечение (A, B), где A — совокупность всех элементов $a \in M$, для которых $a < p$, а B — совокупность всех элементов $b \in M$, для которых $b > p$. Любое сечение может быть получено таким способом.

Сечение (A, B) в M называется дизъюнктным, если $A \cup B = M$. Если множество $M \cup p$ линейно упорядочено, то определяемое элементом p сечение дизъюнктно.

В множестве сечений ч. у. м. M следующим образом вводится упорядоченность: считается, что $(A, B) < (A', B')$, если $B \cap A'$ непусто. Если сечения (A, B) и (A', B') определяются элементами p и p' множества $M \cup p \cup p'$, то из $(A, B) < (A', B')$ следует, что $p < p'$. Оказывается, что множество всех дизъюнктных сечений линейно упорядочено. Показывается, что всякое ч. у. м. M единственным образом представимо в виде объединения линейно упорядоченного множества подмножеств M_i не имеют дизъюнктных сечений.

Линейно упорядоченное подмножество L ч. у. м. M называется линией. Линия называется полной в M, если она не содержится ни в какой большей линии множества M. Доказываются некоторые предложения, касающиеся связи полных линий ч. у. м M с его подмножествами. Исследуется, какие сечения на полной линии L индуцируются сечениями ч. у. м. M.

Некоторое множество полных линий $\{L_i\}$ называется линейной базой ч. у. м. M, если всякое отношение $a > b$, имеющее место в M, является следствием отношений упорядоченности на этих линиях и аксиомы транзитивности. Пусть I — совокупность всех полных линий множества M, а I_1 — множество всех подмножеств множества I. Указывается, что вопрос о наличии в M линейных баз с определенными свойствами сводится к вопросу о наличии в I_1 элементов с соответствующими свойствами. Я. В. Хион

3712. Обобщение теорем в «общей алгебре». Рокос (Generalisation of theorems in «General algebra». Rokos P.), Bull. Soc. Math. Grèce, 1954, 28, 167—187 (греч., рез. англ.)

Алгебра определяется как множество Σ с ν μ-арными операциями φ_k. Для алгебр определяются такие основные понятия, как подалгебра, правый и левый единичные элементы, коммутативный и ассоциативный законы, гомоморфизмы, отношения эквивалентности. Отношение эквивалентности R называется каноническим относительно μ-арной операции φ, если из $\alpha_i \equiv \beta_i (R)$, $i = 1, 2, \ldots, \mu$, следует

$$\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_\mu) \equiv \varphi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_\mu)(R).$$

Канонические отношения эквивалентности используются для доказательства теоремы о гомоморфизмах, устанавливающей соответствие между гомоморфизмами и отношениями эквивалентности. После рассмотрения специальных случаев групп и полугрупп вводится понятие алгебры-кольца. Алгебра-кольцо есть множество, являющееся абелевой группой относительно некоторых операций φ_i ($i = 1, \ldots, \rho$), единицы которых совпадают, и являющееся полугруппой относительных некоторых операций f_j, $j = 1, 2, \ldots, \sigma$, дистрибутивных относительно каждой из операций φ_i. Изучается разбиение алгебры-кольца с помощью отношения эквивалентности и доказывается теорема о гомоморфизмах для алгебр-колец и соответствующих обобщенных идеалов. В качестве примеров рассмотрены булевы алгебры. L. A. Kokoris

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 11, 927.

3713. Условие упорядочиваемости произвольного кольца. Поддерюгин В. Д., Успехи матем. наук, 1954, 9, № 4, (62), 211—216

Система отличных от нуля элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ некоторого не обязательно ассоциативного кольца R называется правильной, если эти элементы попарно различны и попарно не противоположны. Правильная система элементов

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \qquad (1)$$

называется независимой, если всякая сумма конечного числа отличных от нуля элементов кольца, каждый из которых может быть записан в виде некоторого произведения элементов системы (1), сама отлична от нуля. Доказано, что кольцо R тогда и только тогда может быть упорядочено, когда для любой правильной системы элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$ существует хотя бы одна такая независимая система элементов $b_1, b_2, \ldots, b_n$, что $b_i = a_i$ или $-a_i$ ($i = 1, 2, \ldots, n$). Если некоторое подкольцо R' кольца R упорядочено, то в R тогда и только тогда можно ввести упорядоченность, продолжающую упорядоченность подкольца R', когда для всех $a_i \in R'$ (см. выше) соответствующие b_i положительны в R'.

Произведение отличных от нуля элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ называется четным, если каждый сомножитель a_i входит в него четное число раз. Доказано, что кольцо R без делителей нуля тогда и только тогда может быть упорядочено, когда любая сумма четных произведений его элементов отлична от нуля. В ассоциативном случае это условие превращается в условие Йонсона (Johnson R. E., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, 3, № 3, 414—416). М. И. Зайцева

3714. Транспонированные ветвящиеся процессы. Хаммерсли, Мортон (Transposed branching processes. Hammersley J. M., Morton K. M.), J. Roy. Statist. Soc., 1954, **B16**, № 1, 76—79 (англ.)

Пусть некоторое множество частиц разбито на классы $C_1, \ldots, C_n$. Ветвящимся процессом называется процесс, при котором каждая частица из класса C_j порождает a_{ij} частиц из класса C_i, после чего исчезает. Матрица $A = \| a_{ij} \|$ называется матрицей ветвящегося процесса. На примере показывается, что изучение данного ветвящегося процесса может быть иногда упрощено введением в рассмотрение ветвящегося процесса с транспонированной матрицей. Ф. И. Карпелевич

3715. Существование ортогональных базисов в абстрактных пространствах. Шмидт (The existence of orthogonal bases in abstract spaces. Schmidt Jürgen), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 169—170 (англ.)

Рассматривается структура $\mathfrak{P}(E)$ всех подмножеств заданного множества E, в которой для каждого $A \in \mathfrak{P}(E)$ определена операция замыкания $\mathfrak{C}A$. Множество A называется порождающим множество B, если из $A \subset B \subset \mathfrak{C}A$ и того, что B замкнуто, следует, что $B = \mathfrak{C}A$. Множество B называется независимым, если в B не существует собственного подмножества, порождающего B. В топологии независимость означает изолированность, «A порождает B» означает — A плотно в B. Подмножество A называется базисом множества B, если A независимо и порождает B. В топологических пространствах Фреше базисом множества является совокупность всех изолированных точек этого множества.

Автор сообщает, что его доклад посвящен вопросу о существовании базисов специального вида, т. н. ортогональных, в структурах с замыканием, в частности в гильбертовом пространстве и в K-пространстве. Точного определения не приводится. Б. З. Вулих

3716. О дистрибутивных системах операций. Белоусов В. Д., Матем. сб., 1955, **36**, № 3, 479—500

Рассматривается множество M, на котором определена некоторая система бинарных операций $A, B, C, \ldots$. Применение операции A к произвольным двум элементам $a, b \in M$ обозначается через $A(a, b)$. Операция A называется обратимой справа, если уравнение $A(a, x) = b$ имеет единственное решение при любых a, b. В множестве $\mathfrak{R}$ всех обратимых справа операций, определенных на M, вводится правое умножение, задаваемое следующей формулой:

$$AB(a, b) = A[a, B(a, b)]; \quad a, b \in M.$$

Относительно этого умножения множество $\mathfrak{R}$ образует группу. Единичным элементом этой группы является правая единичная операция E, которая определяется равенством $E(a, b) = b$ для любых $a, b \in M$.

Операция A называется дистрибутивной слева относительно операции B (обозначение: AdB), если

$$A[a, B(b, c)] = B[A(a, b), A(a, c)]; \quad a, b, c \in M.$$

Совокупность операций $\Pi \subseteq \mathfrak{R}$ называется дистрибутивной системой операций (д. с. о.), если AdB для любых операций $A, B \in \Pi$. Подгруппа $\{\Pi\}$ группы $\mathfrak{R}$, порождаемая д. с. о. Π, также является д. с. о. К каждой д. с. о. Π, не нарушая ее дистрибутивности, можно присоединить правую единичную операцию E. Д. с. о. Π, содержащая E, называется полной д. с. о. (п. д. с. о.), если, какова бы ни была тройка попарно различных элементов $a, b, c \in M$, в Π существует по крайней мере одна такая операция $A \neq E$, что $A(a, b) = c$ (в дальнейшем доказывается, что такая операция A в п. д. с. о. Π единственна). Каждая п. д. с. о. Π является максимальной д. с. о. и, следовательно, составляет подгруппу группы $\mathfrak{R}$. Указан пример максимальной д. с. о., не являющейся п. д. с. о.

Операция A называется идемпотентной, если $A(a, a) = a$ для любого $a \in M$, и неидемпотентной, если $A(a, a) \neq a$ для любого $a \in M$. Система операций Π называется идемпотентной системой, если каждая операция из Π идемпотентна; система операций Π называется неидем-

потентной системой, если все операции из П, кроме E (если $E \in \Pi$), неидемпотентны. Каждая п. д. с. о. П является либо идемпотентной п. д. с. о. (и. п. д. с. о.), либо неидемпотентной п. д. с. о. (н. п. д. с. о.).

Если П — и. п. д. с. о., то каждая операция из П обратима и слева; правое умножение операций на П коммутативно. Далее, на множестве M можно так определить операции сложения и умножения, что M относительно этих операций становится полем (которое обозначается через P) и каждая операция $A \in \Pi$ задается в поле P следующим образом:

$$A(a, b) = (1 - p)a + pb,$$

где p — отличный от нуля элемент поля P, зависящий от операции A; при этом каждый отличный от нуля элемент $p \in P$ определяет по этой формуле некоторую операцию $A \in \Pi$. Поле P определяется и. п. д. с. о. П, с точностью до изоморфизма, однозначно.

Если П н. п. д. с. о., то на множестве M можно так определить операцию умножения, что относительно этой операции множество M является группой (которая обозначается через G) и каждая операция $A \in \Pi$ задается на группе G формулой

$$A(a, b) = ba^{-1}qa,$$

где q — фиксированный элемент группы G, зависящий от операции A; при этом каждый элемент $q \in G$ определяет по этой формуле некоторую операцию $A \in \Pi$. Группа G определяется н. п. д. с. о. П, с точностью до изоморфизма, однозначно. Е. Г. Шульгейфер

3717. Теорема, характеризующая структуры с хаусдорфовой интервальной топологией. Бэр (A characterization theorem for lattices with Hausdorff interval topology. Baer R. M.), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 2, 177—181 (англ.)

Пусть X и Y — непустые подмножества частично упорядоченного множества P. Говорят, что $X \rightarrow Y$, если либо $x < y$, либо $x \# y$ (x несравним с y) для всех $x \in X$ и $y \in Y$. Аналогично, $X \rightrightarrows Y$, если либо $x \leqslant y$, либо $x \# y$. Для любого элемента $x \in P$, через $\check{x}$ обозначается полуинтервал $[z \geqslant x]$, а через $\hat{x}$ — полуинтервал $[z \leqslant x]$.

Доказывается, что структура L тогда и только тогда является хаусдорфовым топологическим пространством в своей интервальной топологии (Биркгоф, Теория структур, Изд-во ин. лит., 1952, проблема 23), когда для каждой пары элементов a и b ($a < b$) структуры L существуют такие конечные непустые подмножества A и B, что $a \rightarrow A \rightrightarrows b$, $a \rightrightarrows B \rightarrow b$ и система полуинтервалов $\check{x}_{x \in A}$, $\hat{y}_{y \in B}$ покрывает структуру L.

Приводятся примеры, показывающие, что 1) необходимое условие Нортхема (РЖМат, 1955, 1686), состоящее в том, что каждый замкнутый интервал структуры имеет конечное отделяющее множество, не является достаточным, 2) условие теоремы нельзя ослабить, потребовав только существования такого отделяющего множества D, что $a \rightrightarrows D \rightrightarrows B$ (хотя множество $A \cup B$ и является отделяющим для L).

Примечание. В доказательстве теоремы имеется опечатка: напечатано $V_b' = [\cup_{y \in B_1} \hat{y}] \cup [\cup_{x \in B_2} \check{y}]$ следует, читать $V_b' = [\cup_{y \in B_1} \hat{y}] \cup [\cup_{y \in B_2} \check{y}]$. И. В. Стеллецкий

3718. О естественных конструкциях. I. Герстенхейбер (On canonical constructions. I. Gerstenhaber Murray), Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1955, **41**, № 4, 233—236 (англ.)

Если некоторому строению S сопоставляется внутренним образом строение S', то строение S' называется производным от строения S. Это понятие, а также понятия подстроения, изоморфизма строений считаются интуитивно ясными. Соответствие между элементами двух строений, которое, при соблюдении некоторых определенных условий, может быть установлено единственным образом без «произвольного выбора», называется естественным соответствием. Автоморфизм строения S индуцирует автоморфизм в производном строении S'. Получающийся автоморфизм называется внутренним автоморфизмом строения S'. Понятие внутреннего автоморфизма относительно и зависит от способа получения S' из S. Если S' является группой всех автоморфизмов строения S, то это понятие внутреннего автоморфизма совпадает с обычным.

Формулируются без доказательства несколько общих предложений о естественных изоморфизмах и внутренних автоморфизмах строений. В частности, утверждается, что если строение S естественно восстанавливается по производному строению S', то каждый автоморфизм строения S' — внутренний. Эта теорема применяется для доказательства известной теоремы Гёльдера о том, что группа S' всех подстановок любого (конечного или бесконечного) множества S, состоящего из $n \neq 6$ элементов, совершенна. Доказывается, что в случае $n \neq 6$ транспозиция из S' однозначно определяется следующими тремя свойствами: 1) она имеет порядок два; 2) множество всех элементов группы S', перестановочных с транспозицией, составляет максимальную подгруппу; 3) если n конечно, то число элементов из S', перестановочных с транспозицией, равно $(n-2)!\,2$. Отсюда следует, что множество S можно естественно восстановить по группе S', рассматриваемой как группа всех автоморфизмов множества S. Теорема Гёльдера является таким образом непосредственным следствием указанного выше утверждения. М. Л. Берликов

3719 Д. О структуре локально-I-конечных колец с регулярными степенями. Остерман (Über die Struktur von lokal-I-endlichen potentregulären Ringen. Ostermann Fritz. Diss. Math.-naturwiss F., Bonn., 1953, 84 Bl. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, **B**, № 19, 1596 (нем.)

См. также: 3597, 3598, 3599, 3600, 3601, 3725, 3731, 3734, 3738 Д, 3907, 3937, 3940, 3956, 4039, 4059, 4060, 4070, 4072, 4103, 4104, 4105, 4106, 4110

ТОПОЛОГИЯ

3720. О почти периодических преобразованиях равномерных пространств. Исеки (On almost periodic transformations on uniform spaces. Iséki Kiyoshi), Proc. Japan Acad., 1955, **31**, № 6, 340 (англ.)

Приводятся обобщения некоторых теорем Готсчока (Gottschalk W. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1944, **50**, 222—227) Эрдёша и Стоуна (Erdös P., Stone A. H., Bull. Amer. Math. Soc., 1945, **51**, 126—130) о почти периодических преобразованиях метрических пространств. Ю. М. Смирнов

3721. О связи пространств близости с расширениями топологических пространств. Мышкис А. Д., Вигант Э. И., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 6, 969—972

Пусть M — топологическое пространство. Ю. М. Смирнов (Докл. АН СССР, 1952, **84**, № 5, 895—898) показал, что каждому пространству близости, совместимому с топологией пространства M, взаимно однозначно соответствует бикомпактное расширение пространства M. Одновременно А. Д. Мышкис (Докл

АН СССР, 1952, 84, № 5, 879—882) также поставил в соответствие пространству близости на M некоторое расширение пространства M. В настоящей заметке устанавливается связь между этими двумя конструкциями. Оказывается, что при определенных условиях, построенное А. Д. Мышкисом расширение состоит из тех точек бикомпактного расширения, соответствующего данному пространству близости, которые являются пределами счетных последовательностей точек из M.

А. С. Шварц

3722. О двух экстремальных свойствах топологических пространств. Банашевский (Über zwei Extremaleigenschaften topologischer Räume. Banaschewski Bernhard), Math. Nachr., 1955, 13, № 3—4, 141—150 (нем.)

Подобно понятию H-замкнутости, автор вводит и рассматривает для некоторых топологических свойств τ понятие τ-замкнутости (следуя Биркгофу, автор пишет τ-vollständig): топологическое пространство R, обладающее свойством τ, называется τ-замкнутым, если никакое отличное от R расширение пространства R не обладает свойством τ. Наряду с этим вводится и понятие τ-минимальности: топологическое пространство R считается τ-минимальным, если оно само обладает свойством τ, но в нем нельзя ввести более сильную топологию (уменьшая число открытых множеств), обладающую свойством τ. В работе рассматриваются лишь следующие шесть топологических свойств: α—«хаусдорфовость»(separierte), β—полурегулярность(наличие базы, состоящей из канонических открытых множеств, т. е. таких открытых множеств, которые совпадают с открытым ядром своего замыкания), γ—регулярность, δ—нульмерность, ε—локальная бикомпактность, ζ—полная регулярность. Основной результат: для любого $\tau = \alpha, \ldots, \zeta$ всякое τ-минимальное пространство τ-замкнуто; обратно, для любого $\tau = \beta, \delta, \varepsilon, \zeta$ всякое τ-замкнутое пространство τ-минимально. Приводится пример α-замкнутого, но не α-минимального пространства.

Ю. М. Смирнов

3723. Теорема об отображении метрического пространства. Балачандран (A mapping theorem for metric spaces. Balachandran V. K.), Duke Math. J., 1955, 22, № 3, 461—464 (англ.)

Доказывается, что если f — одновременно замкнутое и открытое непрерывное отображение метрического пространства R^* на топологическое пространство R^*, то пространство R^* метризуемо.

Примечание референта. Ханаи показал (РЖМат, 1955, 3660), что требование открытости отображения в этой теореме излишне.

А. С. Пархоменко

3724. Частично непрерывные разбиения. Бинг (Partially continuous decompositions. Bing R. H.), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 1, 124—133 (англ.)

В метрическом пространстве рассматриваются системы компактных множеств без общих точек. Система G множеств называется полунепрерывной сверху (снизу) при условии, что для каждого элемента g системы G и для всякого положительного числа ε найдется такое положительное число δ, что если $\rho(g, g') < \delta$, $g' \in G$, то $g' \subset V(g, \varepsilon)$ (соответственно $g \subset V(g', \varepsilon)$).

В случае компактности пространства X, система G тогда и только тогда полунепрерывна сверху (снизу), когда для всякой сходящейся последовательности $\{p_i\}$ точек множества X верхний (нижний) предел соответствующей последовательности $g_i(p_i \in g_i)$ содержится в некотором элементе (содержит каждый пересекающийся с ним элемент) системы G. Система G непрерывна, если она полунепрерывна и сверху и снизу. Если элементы системы G связны, то G называется монотонным разбиением пространства X.

Теорема 1. Пусть G — монотонное полунепрерывное снизу разбиение локально компактного пространства X, содержащее более одного элемента. Для всякого элемента g_0 разбиения G и для всякого положительного числа ε найдется такой континуум $M \supset g_0$, что M есть сумма элементов разбиения G и отклонение (по Хаусдорфу) всяких двух элементов разбиения G, содержащихся в M, меньше ε.

Теорема 2. Пусть G — полунепрерывное снизу разбиение локально компактного метрического пространства X со счетной базой, состоящее из несчетного множества элементов. Существует такая несчетная непрерывная подсистема G' системы G, сумма элементов которой есть компакт.

Теорема 3. Пусть G — монотонное полунепрерывное снизу разбиение связного компактного метрического пространства X и A, B — два непустых замкнутых подмножества пространства X. Тогда в X существует континуум M, являющийся суммой элементов разбиения G, пересекающий оба множества A и B и не содержащий никакого подконтинуума, обладающего указанными свойствами.

Если M_A и M_B означают суммы элементов разбиения G, содержащихся в M, которые пересекают соответственно множества A и B, то каждое из множеств $M \setminus M_A$, $M \setminus M_B$ и $M \setminus (M_A \cup M_B)$ связно.

Теорема 4. Пусть G — такое полунепрерывное снизу разбиение замкнутого плоского множества, что каждый его элемент есть локально связный континуум, содержащий более одной точки. Тогда разбиение G непрерывно.

Приведен пример полунепрерывного снизу разбиения куба на одномерные и двумерные элементы, которое не является полунепрерывным сверху.

А. С. Пархоменко

3725. Замкнутые гомоморфизмы и внутренние отображения. Сикорский (Closure homomorphisms and interior mappings. Sikorski R.), Fundam. math., 1954, 41, № 1, 12—20 (англ.)

Алгебра замыканий A есть булева σ-алгебра с операцией замыкания $\bar{a}$ ($a \in A$), удовлетворяющей хорошо известным аксиомам Куратовского. Замкнутый гомоморфизм есть такой булевский σ-гомоморфизм h алгебры замыканий A в алгебру замыканий B, что $h(\bar{a}) = \overline{h(a)}$.

Автор доказывает, что отображение φ топологического пространства X в другое топологическое пространство Y тогда и только тогда является внутренним (т. е. открытым и непрерывным), когда $\varphi^{-1}(\bar{B}) = \overline{\varphi^{-1}(B)}$ для каждого множества $B \subset Y$ (иначе говоря, когда соотношение $h(B) = \varphi^{-1}(B)$ определяет замкнутый гомоморфизм алгебры замыканий $S(Y)$ всех подмножеств пространства Y в алгебру замыканий $S(X)$ всех подмножеств пространства X). При некоторых дополнительных предположениях гомоморфизм $h(B)$ может быть ограничен борелевскими множествами $B \subset Y$. В случае, когда X и Y — метрические пространства, автор получает следующую теорему (ранее доказанную Эйленбергом для компактных пространств): Отображение φ тогда и только тогда является внутренним, когда для каждой сходящейся последовательности $\{y_n\}$ точек пространства Y имеет место соотношение $\varphi^{-1}(\lim_{n\to\infty} y_n) = \lim_{n\to\infty} \varphi^{-1}(y_n)$. В общем случае пространство Y тогда и только тогда является внутренним образом пространства X, когда алгебра замыканий $S(Y)$ изоморфна подалгебре алгебры замыканий $S(X)$. Автор применяет последнее замечание к проблеме представления для замкнутых алгебр со счетным базисом (Fundam. math., 1949, 36, 165—206). Однако эта проблема представления не решена полностью, так как неизвестно, является ли каждое сепара-

бельное (т. е. удовлетворяющее второй аксиоме счетности) T_0-пространство внутренним образом сепарабельного метрического пространства. Автор доказывает, что каждое сепарабельное T_0-пространство является внутренним образом вполне несвязного сепарабельного хаусдорфова пространства. H. Rasiowa

3726. Об открытых образах борелевских множеств. Тайманов А. Д., Матем. сб., 1955, **37**, № 2, 293—300

Известно, что при открытых отображениях классы борелевских множеств не сохраняются: Л. В. Келдыш (Докл. АН СССР, 1945, **49**, № 5, 646—648) показала, что всякое A-множество является открытым образом множества типа $G_\delta \cap F_\sigma$. Автор в § 1 показывает, что всякое B-множество является счетно-кратным открытым образом множества типа $G_\delta \cap F_\sigma$. Этот результат является следствием следующей общей теоремы 1: Пусть α — семейство метрических пространств со счетной базой, замкнутое относительно операций топологического отображения и счетного суммирования (т. е. топологический образ $f(A)$ каждого $A \in \alpha$ и сумма $\bigcup_i A_i$ любых $A_i \in \alpha$ также принадлежат семейству α); тогда непрерывный образ некоторого пространства $A \in \alpha$ является и открытым образом некоторого пространства $A' \in \alpha$.

В § 2 вводится понятие изолированного отображения (непрерывное отображение пространства X на пространство Y называется изолированным, если полный прообраз каждой точки $y \in Y$ содержит по крайней мере одну изолированную (в полном прообразе) точку) и доказывается следующая общая теорема 2: Всякое семейство множеств гильбертова пространства, содержащее все замкнутые и все открытые его множества, и замкнутое относительно операций топологического отображения, счетной суммы и пересечения, является замкнутым и относительно операции открытого изолированного отображения. Из этой теоремы вытекает целый ряд следствий. Например: 1. Изолированные открытые отображения не повышают класса B-множеств. 2. Изолированный открытый образ CA-множества является также CA-множеством. 5. Изолированные отображения не повышают размерности. Отсюда в свою очередь вытекает следующее усиление известной теоремы П. С. Александрова (Докл. АН СССР, 1936, **4**, 283—288) о неповышении размерности при счетно-кратных открытых отображениях множеств первого класса: 6. Счетно-кратные открытые отображения не повышают размерности множеств типа G_δ. Это решение окончательное: автор строит счетно-кратное открытое отображение множества типа F_σ, повышающее размерность. В § 3 некоторые из приведенных результатов несколько усиливаются для конечно-кратных открытых отображений. Ю. М. Смирнов

3727. Об одной теореме Ф. Ж. Дайсона. Берштейн (Observație cu privire la o teoremă a lui F. J. Dyson. Berstein I.), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 6, 969—971 (рум.; рез. русс., франц.)

Автор следующим образом обобщает известную теорему Дайсона (Dyson F. J., Ann. Math., 1951, 54, 534—536) о сфере: Пусть f — непрерывная действительная функция, определенная на локально связном уникогерентном (метризованном) континууме E, а T — инволюционный гомеоморфизм этого континуума на себя без неподвижных точек; тогда для каждого d, $0 < d \leqslant \inf \rho(x, T(x))$, $x \in E$, существуют точки a, $b \in E$, для которых $\rho(a, b) = d$ и $f(a) = f(b) = f(T(a)) = f(T(b))$. В. А. Ефремович

3728. О понятии пространства в топологии. Александров П. С., Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, Suppl., 43—60

Статья обзорного типа о развитии абстрактной топологии (теории топологических пространств) и современном ее состоянии. Особое внимание уделено проблеме метризации и решению этой проблемы, данному Нагата и референтом, теории проекционных спектров, и, наконец, введенным В. А. Ефремовичем пространствам близости. Ю. М. Смирнов

3729. Что такое топология. Борсук (Co to jest topologia. Borsuk K.), Roczn. Polsk. towarz. mat. Ser. II—Wiadom. mat., 1955, **1**, № 1, 65—74 (польск.)

Популярная статья. Предмет и методы топологии иллюстрируются на примерах зацепления окружностей, листа Мёбиуса, теоремы Жордана, построения трех областей с общей границей, теоремы Брауэра о неподвижной точке, теоремы Борсука об антиподах, задачи четырех красок, понятий многомерного пространства, пространства Гильберта и пространства непрерывных функций, теории размерности. Дан краткий очерк развития топологии в Польше. М. Ф. Бокштейн

3730. Гомологии спинорной группы. Альбер С. И., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 3, 341—344

Борель (РЖМат, 1954, 5083) полностью определил группы гомологий спинорной группы. В настоящей заметке другим способом вычисляются эти группы гомологий и строятся системы циклов, классы гомологий которых составляют базы групп гомологий спинорной группы по модулю 2 и по целым числам. А. С. Шварц

3731. Замечание к одной теореме С. Каплана. Лептин (Bemerkung zu einem Satz von S. Kaplan. Leptin Horst), Arch. Math., 1955, **6**, № 2, 139—144 (нем.)

Пусть $\Omega = \{G_\alpha\}$ и $\hat{\Omega} = \{\hat{G}_\alpha\}$ — две такие системы абелевых топологических групп, что для каждого α группы G_α и $\hat{G}_\alpha$ двойственны, $G_\alpha \mid \hat{G}_\alpha$, причем выделены подгруппы $H_\alpha \subset G_\alpha$ и $\hat{H}_\alpha \subset \hat{G}_\alpha$, являющиеся аннуляторами одна другой. Прямые суммы (в обычном смысле) систем $\theta = \{H_\alpha\}$ и $\hat{\theta} = \{\hat{H}_\alpha\}$ обозначим через G_θ и $\hat{G}_{\hat{\theta}}$, соответственно. Прямая сумма G^θ системы Ω, следуя Браконье, определяется как группа всех таких $x = \{x_\alpha\}$, $x_\alpha \in G_\alpha$, что почти для всех α, $x_\alpha \in H_\alpha$. Группу G^θ автор топологизирует ядрами U, состоящими из всех тех $x = \{x_\alpha\} \in G^\theta$, для которых $x_\alpha \in U_\alpha$ и $\Sigma_\alpha x_\alpha / U_\alpha < 1$; при этом ядра U_α групп G_α выбраны так, что почти для всех α ядро U_α содержит все элементы из G_α, переводящие данное компактное подмножество $\hat{F}_\alpha$ подгруппы $\hat{H}_\alpha$ в данное ядро группы действительных чисел mod 1, а $x_\alpha / U_\alpha = \frac{1}{2^n}$, если $\frac{1}{2^n} U_\alpha \ni x_\alpha \overline{\in} \frac{1}{2^{n+1}} U_\alpha$ и $x_\alpha / U_\alpha = 0$, если $x_\alpha \in \frac{1}{2^n}$ при всех n (указанная сумма всегда оказывается конечной).

Обобщая теорему Каплана, автор доказывает двойственность групп G^θ и $\hat{G}^{\hat{\theta}}$. Далее показывается, что при этом $\hat{G}_\theta$ и $G_{\hat{\theta}}$ аннулируют одна другую, а если для каждого α $H_\alpha \mid \hat{G}_\alpha / \hat{H}_\alpha$ и $\hat{H}_\alpha \mid G_\alpha / H_\alpha$, то $G^\theta / G_\theta \mid \hat{G}_{\hat{\theta}}$ и $\hat{G}^{\hat{\theta}} / \hat{G}_{\hat{\theta}} \mid G_\theta$.

При $\theta = \Omega$, т. е. когда $H_\alpha = G_\alpha$ (в этом случае G^θ превращается в прямую сумму групп G_α в обычном смысле), и $\hat{\theta} = 0$, т. е. когда все $\hat{H}_\alpha$ суть нулевые под-

группы (в этом случае $\hat{G}^{\hat{\theta}}$ есть слабая прямая сумма групп $\hat{G}_\alpha$ в так называемой звездообразной топологии), отсюда получаем теорему Каплана (Kaplan S., Duke Math. J., 1948, 15, 649—658).

Примечание референтов. Двойственность групп G^θ и $\hat{G}^{\hat{\theta}}$ в частном случае, когда $\hat{G}_\alpha / \hat{H}_\alpha$ и G_α / H_α являются группами характеров групп H_α и $\hat{H}_\alpha$ соответственно (но при более широких предположениях другого порядка, например при рассмотрении групп с заданной ограниченностью и т. п.), доказана Н. Я. Виленкиным (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 4 (38), 19—74; Изв. АН СССР, сер. матем., 1951, 15, 503—532). Г. Т. Абдушелишвили, Г. С. Чогошвили

3732. Задача о снятии секущей поверхности с подпроизведения. Болтянский В., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 5, 669—672

Пусть $P = \{P, p, B, F, G\}$ — косое произведение, базой B которого является симплициальное разбиение, а структурная группа G линейно связна. Косое произведение $Q = \{Q, p, B, E, G'\}$ называется подпроизведением произведения P, если $Q \subset P$, E — инвариантное относительно G подпространство слоя F, $G' = G / N$, где N — ядро неэффективности группы G на подпространстве E и координатные функции произведения Q являются частями соответствующих координатных функций произведения P. Пусть в косом произведении P существует секущая поверхность $\mathfrak{S}_0$: $B \to P$. Автор рассматривает задачу о построении гомотопной поверхности $\mathfrak{S}_0$ секущей поверхности $\mathfrak{S}_1$, для которой $\mathfrak{S}_1(B) \subset P \setminus Q$. Для этой задачи строится соответствующая теория препятствий. Окончательные результаты получены для первого и второго препятствий. Доказательств работа не содержит. Имеются опечатки, порой весьма затрудняющие понимание.

М. М. Постников

3733. О гомотопических группах букетов пространств. Хилтон (On the homotopy groups of unions of spaces. Hilton P. J.), Comment. math. helv., 1955, 29, № 1, 59—92 (англ.)

Пусть X и Y — линейно связные топологические пространства и $X \vee Y$ — их букет, естественным образом вложенный в произведение $X \times Y$. Легко видеть, что $\pi_r(X \vee Y) = \pi_r(X) + \pi_r(Y) + \pi_{r+1}(X \times Y, X \vee Y)$. Используя теорему Гуревича для относительных групп, автор весьма просто доказывает, что если пространства X и Y односвязны и асферичны в размерностях, меньших p и q соответственно, то $\pi_{r+1}(X \times Y, X \vee Y) = 0$, если $r < p + q - 1$ и $\pi_{p+q}(X \times Y, X \vee Y) \approx \pi_p(X) \otimes \pi_q(Y) \approx H_p(X) \otimes H_q(Y)$. Этот факт был ранее доказан лишь в предположении, что по крайней мере одно из пространств X, Y является сферой. Далее, используя точную последовательность Уайтхеда, автор находит группу $\pi_{p+q+1}(X \times Y, X \vee Y)$ в случае, когда X и Y являются клеточными разбиениями и $p, q \geqslant 3$. Оказывается, что эта группа является расширением некоторой группы $G \approx H_p(X) \otimes H_{q+1}(Y) + H_{p+1}(X) \otimes H_q(Y)$ с помощью группы $\mathrm{Tor}(H_p(X), H_q(Y))$. Группа G, рассматриваемая как подгруппа группы $\pi_{p+q}(X \vee Y)$, состоит из всех элементов, разложимых в произведение Уайтхеда В типическом случае, когда X и Y являются сферами, заклеенными элементами, это расширение рассмотрено более подробно. Указаны также обобщения на случай букетов, состоящих из нескольких пространств.

М. М. Постников

3734. Когомологии и теорема Римана — Роха. Спенсер (Cohomology and the Riemann-Roch theorem. Spencer D. C.), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1953, 39, № 7, 660—669 (англ.)

Пусть M — комплексно-аналитическое многообразие (комплексной) размерности n, а S — его несингулярное аналитическое подмногообразие размерности $n-1$. В каждой точке $p \in S$ вводятся такие локальные аналитические координаты $z_p^1, \ldots, z_p^n$ с центром p для окрестности U_{p_2} этой точки в M, что $z_p^1 = 0$ на S и что $z_p^2, \ldots, z_p^n$ становятся локальными координатами на S.

Обозначим через $A^{r,s}$ пучок источников (относительно определения встречающихся здесь понятий см. РЖМат, 1953, 130 и РЖМат, 1954, 3272) потоков типа (r, s), т. е. линейных функционалов $\alpha_p = \alpha_p[\psi_p]$, определенных на совокупности внешних форм ψ_p с бесконечно дифференцируемыми коэффициентами, отличными от нуля лишь внутри некоторой компактной части U_p, от $n-r$ дифференциалов переменных $\bar{z}_p^n, \ldots, \bar{z}_p^n$ и $n-s$ дифференциалов переменных $\bar{z}_p^1, \ldots, \bar{z}_p^n$ (форм типа $(n-r, n-s)$). Применяя к формам внешнее дифференцирование по переменным $\bar{z}_p^1, \ldots, \bar{z}_p^n$, получаем сопряженный ему оператор $\bar{\partial}$, отображающий потоки типа (r, s) в потоки типа $(r, s+1)$. Через $F^{r,s}$ обозначим подпучок пучка $A^{r,s}$, состоящий из источников потоков типа (r, s), замкнутых относительно $\bar{\partial}$.

Обозначим далее через $\Omega^r = \Omega^r(M)$ пучок источников r-форм ω_p (т. е. внешних форм от r дифференциалов переменных $z_p^1, \ldots, z_p^n$) с голоморфными коэффициентами, а через Ω_S^r — пучок источников r-форм τ_p с мероморфными коэффициентами, становящихся голоморфными после умножения на z_p^1. Эти последние формы рассматриваются как потоки в U_p типа $(r, 0)$, определенные соотношением $\tau_p[\psi_p] = \int_{U_p} \tau_p \psi_p$. Положим $\bar{\partial}\tau_p[\psi_p] = 2\pi i \mathscr{R}_p[\psi_p]$, и рассмотрим пучок $\mathscr{R}_S^r$ источников этих потоков $\mathscr{R}_p$. Имеет место естественный изоморфизм $\mathscr{R}_S^r \approx \Omega^{r-1}(S) + \Omega_D^r(S)$, где D — специальным образом определенный дивизор многообразия S (его характеристический дивизор, существование которого во всяком случае обеспечено, когда M есть алгебраическое многообразие). Последовательность пучков $0 \to \Omega^r \xrightarrow{i} \Omega_S^r \xrightarrow{\bar{\partial}} \mathscr{R}_S^r \to 0$ оказывается точной (i — отображение вложения). Ей соответствует точная когомологическая последовательность $\ldots H^{s-1}(M, \mathscr{R}_s^r) \xrightarrow{\delta^*}$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^s(M, \Omega^r) \xrightarrow{i^*} H^s(M, \Omega_S^r) \xrightarrow{\bar{\partial}^*} H^s(M, \mathscr{R}_s^r) \xrightarrow{\delta^*}$$

$$\xrightarrow{\delta^*} H^{s+1}(M, \Omega^r) \to \ldots$$

(δ^* есть обобщение введенного референтом гомоморфизма), из которой получается соотношение между размерностями рассматриваемых как векторные пространства когомологических групп

$$\dim H^s(M, \Omega_S^r) = \dim \{H^s(M, \Omega^r) / \delta^* H^{s-1}(M, \mathscr{R}_S^r)\} +$$

$$+ \dim H^s(M, \mathscr{R}_S^r) - \dim H^{s+1}(M, \Omega^r) +$$

$$+ \dim \{H^{s+1}(M, \Omega^r) / \delta^*(M, \mathscr{R}_S^r)\}.$$

Из точной когомологической последовательности, соответствующей точной последовательности пучков $0 \to F^{r,s} \xrightarrow{i} A^{r,s} \xrightarrow{\bar{\partial}} F^{r,s+1} \to 0$, можно вывести ев-

тественный изоморфизм $H^s(M, \Omega^r) \approx H^{r,s}(M)$, где $H^{r,s}(M) = H^0(M, F^{r,s}) / \tilde{\partial} H^0(M, A^{r,s-1})$ есть $\tilde{\partial}$-когомология потоков типа (r, s) (РЖМат, 1954, 3272); в случае компактных кэлеровых многообразий группа $H^{r,s}(M)$ изоморфна векторному пространству гармонических форм на M типа (r, s). В силу этого, а также ввиду очевидного изоморфизма $H^s(M, \mathscr{R}^r_S) \approx H^s(S, \Omega^{r-1}) + H^s(S, \Omega^r_D)$ из предыдущего соотношения получается формула для размерностей когомологических групп типа теоремы Римана — Роха

$$\dim H^s(M, \Omega^r_S) = \dim H^{r-1,s}(S) + \dim H^s(S, \Omega^r_D) - \dim H^{r,s+1}(M) + \dim \{H^{r,s}(M) / \delta^* H^{s-1}(M, \mathscr{R}^r_S)\} + \dim \{H^{r,s+1}(M) / \delta^* H^s(M, \mathscr{R}^r_S)\}.$$

Для $s = 0$, $r = 0$ или n соответствующие формулы ранее были получены Кодаира (Kodaira K., Amer. J. Math., 1951, 73, 813—875; Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1952, 38, 522—527). Если через $a^r(M)$ и $a^r_S(M)$ обозначить альтернированные суммы чисел $\dim H^s(M, \Omega^r)$ и соответственно $\dim H^s(M, \Omega^r_S)$ по s, то для них формула получает более простой вид:

$$a^r_S(M) = a^{r-1}(S) + a^r_D(S) - a^r(M).$$

В работе выводится подобным же образом еще ряд других размерностных формул, из которых отметим основные:

$$\dim H^s(S+T, \Omega^r) = \dim H^{r,s}(S) + \dim H^{r,s}(T) - \dim H^{r,s}(S \cdot T) + \dim \{H^{r,s-1}(S \cdot T) / k^* [H^{r,s-1}(S) + H^{r,s-1}(T)]\} + \dim \{H^{r,s}(S \cdot T) / k^* [H^{r,s}(S) + H^{r,s}(T)]\},$$

где k^* — гомоморфизм когомологических групп, соответствующий естественному отображению пучков $\Omega^r(S) + \Omega^r(T) \xrightarrow{k} \Omega^r(S \cdot T)$, и соответствующая формула для альтернированных сумм

$$a^r(S+T) = a^r(S) + a^r(T) - a^r(S \cdot T);$$

$$\dim H^s(M, \Omega^r_{S+T}) = \dim H^s(S+T, \Omega^{r-1}_{S \cdot T}) + \dim H^s(S+T, \Omega^r_{S \cdot T+D}) - \dim H^{r,s+1}(M) + \dim \{H^{r,s}(M) / \delta^* H^{s-1}(M, \mathscr{R}^r_{S+T})\} + \dim \{H^{r,s+1}(M) / \delta^* H^s(M, \mathscr{R}^r_{S+T})\}$$

и соответственно $a^r_{S+T}(M) = a^{r-1}_{S \cdot T}(S+T) + a^r_{S \cdot T+D}(S+T) + a^r(M)$;

$$\dim H^s(M, \Phi^r_S) = \dim H^s(S, \Phi^{r-1}) - \dim H^{s+1}(M, \Phi^r) + \dim \{H^s(M, \Phi^r) / \delta^* H^{s-1}(S, \Phi^{r-1})\} + \dim \{H^{s+1}(M, \Phi^r) / \delta^* H^s(S, \Phi^{r-1})\}.$$

где Φ^r и Φ^r_S — пучки источников форм соответственно из $\Omega^r(S)$ и из Ω^r_S, замкнутых относительно операции внешнего дифференцирования d этих форм.

М. Ф. Бокштейн

3735 К. Наглядная топология. Лицман (Anschauliche Topologie. Lietzmann W., München, Oldenbourg, 1955, 171 S., ill. 14.80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 10, 522 (нем.)

3736 К. Непрерывные преобразования в анализе. С введением в алгебраическую топологию. Радо, Рейхельдерфер (Continuous transformations in analysis. With an introduction to algebraic topology. Rado T., Reichelderfer P. V. Berlin, Göttingen, Heidelberg, Springer, 1955, VI, 441 p., ill., 59.60 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 27, 1485 (англ.)

3737 К. Группа нуль-путей и ее обобщения. Баум (Die Nullwegegruppe und ihre Verallgemeinerungen. Diss. Baum Walter Robert. Groningen - Djakarta. Noordhoff, 1953, 38 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 19, 1595 (нем.)

3738 Д. О топологической линейной алгебре. Кирххоff (Beiträge zur topologischen linearen Algebra. Diss. Kirchhoff Adrian. Groningen-Djakarta, Noordhoff, 1953, 36S), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 19, 1595 (нем.)

3739 Д. О роли произведения Уайтхеда в теории гомологий. Эберзольд (Über die Rolle des Whiteheadschen Homotopieproduktes für die Homologie - Theorie. Ebersold Johannes Michael. Diss. math. ETH Zürich, 1955, 40 S.), Schweiz. Buch., 1955, B55, № 3, 133 (нем.)

См. также: 3683/3685, 3715, 3908, 3910, 3929, 4038, 4041, 4056, 4073

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3740. О теореме Брунна — Минковского. Оман (Über den Brunn—Minkowskischen Satz. Ohmann D.), Comment. math. helv., 1955, 29, № 3, 215—222 (нем.)

Для выпуклых тел A, B в E^n и их суммы в смысле Минковского имеет место известное неравенство между средними поперечными мерами:

$$W_p(A+B)^{1/(n-p)} \geqslant W_p(A)^{1/(n-p)} + W_p(B)^{1/(n-p)}, \quad p = 0, 1, \ldots, n-1,$$

причем

$$W_0(A) = \mathrm{mes}(A), \quad W_p(A) = (n v_{n-1})^{-1} \int_{\Omega_n} W_{p-1}(A_\xi)\, d\omega, \quad W_n(A) = v_n.$$

Здесь Ω_n — единичная сфера в E^n, v_n — ее объем, A_ξ — $(n-1)$-мерная проекция множества A в направлении ξ, идущем в элемент сферы $d\omega$. Приведенное неравенство распространяется на произвольные ограниченные замкнутые множества A, B при $p = 1$. Для $p = 0$ это было сделано Люстерником (см. РЖМат, 1955, 3137). Доказывается также, что при $p = 0$ или $p = 1$ для любых чисел, удовлетворяющих неравенствам:

$$z_3 > z_1 + z_2, \; z_4 < z_1 - z_2, \; z_2 > 0, \; z_4 > 0, \qquad (1)$$

существуют ограниченные замкнутые множества A, B, для которых

$$z_1 = W_p(A)^{1/(n-p)}, \; z_2 = W_p(B)^{1/(n-p)}, \; z_3 = W_p(A+B)^{1/(n-p)}, \; z_4 = W_p(A-B)^{1/(n-p)}. \qquad (2)$$

Это говорит о полноте системы неравенств (1) для средних поперечных мер (2). Указанная полнота не

имеет места, если ограничиваться выпуклыми телами (разность $A-B$ в (2) понимается в смысле Минковского, т. е. как совокупность точек, при сдвиге на координатные векторы которых множество B попадает в A). В. А. Залгаллер

3741. Квазинепрерывные функции в абстрактных пространствах. Виола (Funzioni quasi continue in spazi astratti. Viola Tullio), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, 18, № 2, 145—147 (итал.)

Пиконе (Picone M., Teoria moderna dell'integrazione delle funzioni, Pisa, corso litogr.; см. также Picone M., Viola T., Lezioni sulla teoria moderna dell'integrazione, Torino, 1952) было введено понятие квазинепрерывной функции, определенной на множестве I n-мерного евклидова пространства и принимающей действительные значения; это определение связано с мерой, заданной на I и принимающей действительные значения. Автор обобщает его на функции, определенные на подмножестве I абстрактного пространства S и принимающие значения из абстрактного пространства S''. Мера, фигурирующая в определении, принимает значения в абстрактном пространстве S', от которого требуется, чтобы оно было абелевой группой относительно сложения и чтобы в нем была введена норма $\|\nu\|$ ($\nu \in S'$), где $\|\nu\|$ — неотрицательное число, удовлетворяющее условию $\|\nu'-\nu''\| \leqslant \|\nu'\|+\|\nu''\|$. Под пределом функции $\nu(x)$ действительного переменного подразумевается $\nu_0 \in S'$ такое, что $\lim_{x \to x_0} \|\nu(x)-\nu_0\| = 0$.

Пространство S предполагается топологическим. Пусть для всех его борелевских множеств e определена функция множества $\mu(e)$ со значениями в S', вполне аддитивная и конечной вариации.

Положим $m(e) = \sup \Sigma \|\mu(e_i)\|$, где sup берется по всевозможным конечным разбиениям $e = e_1 \cup \ldots \cup e_n$ (e_i — борелевские множества). Множество $I \subset S$ называется лебеговым, если для любого $\varepsilon > 0$ существуют замкнутое множество C_ε и открытое A_ε такие, что $C_\varepsilon \subset I \subset A_\varepsilon$, $m(A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$. Если S — метрическое и сепарабельное, то определение меры μ может быть продолжено на лебеговы множества. Функция $f(P)$, определенная на лебеговом множестве $I \subset S$ и принимающая значения в топологическом пространстве S'', называется квазинепрерывной на I относительно меры $\mu(e)$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся замкнутое C_ε и открытое A_ε такие, что $C_\varepsilon \subset I \subset A_\varepsilon$, $m(A_\varepsilon \setminus C_\varepsilon) < \varepsilon$ и $f(P)$ непрерывна в C_ε. Формулируются без доказательств теоремы о квазинепрерывных функциях; приведем две из них:

1) Пусть пространство S метрическое и сепарабельное и S'' метрическое и полное; если $f(P)$ и $\varphi(P)$ — квазинепрерывные функции на лебеговом множестве $I \subset S$ и $a > 0$ — произвольное число, то множество тех точек P, для которых $\rho(f(P), \varphi(P)) \geqslant a$, является лебеговым множеством.

2) Если, кроме того, S'' сепарабельное и компактное, то для любой последовательности $\{f_n(P)\}$ функций, квазинепрерывных на лебеговом множестве I, можно построить квазинепрерывную на I функцию, равную почти во всех точках $P \in I$ одному из предельных значений последовательности. Ю. С. Очан

3742. Об интегрируемости по Риману. Джи (On Riemann integrability. Gee B. D.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, 51, № 3, 537—538 (англ.)

3743. Типы функций. Смит (Types of functions. Smith Newton B. Abstr. doct. thes. Mathem., Iowa State Coll., 1953—1954), Iowa State Coll. J. Sci., 1955, 29, № 3, 502—503 (англ.)

Отмечаются некоторые свойства функций одного действительного переменного. П. И. Романовский

ТЕОРИЯ МНОЖЕСТВ

3744. Теория операций над множествами. Очан Ю. С., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 3, 71—128

В работе излагаются основы теории операций над множествами. Она состоит из четырех глав и представляет продолжение цикла статей по дескриптивной теории множеств, опубликованного в «Успехах матем. наук», 1950, 5, № 5, 11—119. Основные результаты, изложенные в ней, известны, но содержатся в журнальных статьях различных авторов и в малодоступных монографиях.

В гл. I дается определение теоретико-множественной операции (т. м. о.) с данной базой N. База N, состоящая из множеств натуральных чисел, допускает изображение на канторовом множестве.

В гл. II изучаются положительные т. м. о., называемые δs-операциями. Т. м. о. Ψ называется положительной, если из $E_\alpha \subset \mathcal{E}_\alpha$ следует $\underset{N}{\Psi}(E_\alpha) \subset \underset{N}{\Psi}(\mathcal{E}_\alpha)$. База N называется полной, если из вхождения в нее некоторого множества $\mathfrak{z}$ следует вхождение в нее любого другого множества, содержащего $\mathfrak{z}$. Необходимым и достаточным условием положительности т. м. о. является полнота ее базы.

В гл. III рассматриваются δs-операции Φ над семействами множеств. Φ считается мощнее, чем Φ, если для любого семейства $\mathfrak{N}$ имеет место $\underset{N}{\Phi}(\mathfrak{N}) \supset \underset{M}{\Phi}(\mathfrak{N})$. Φ называется нормальной, если для любого семейства $\mathfrak{N}$ имеет место $\underset{N}{\Phi}[\underset{N}{\Phi}(\mathfrak{N})] = \underset{N}{\Phi}(\mathfrak{N})$. По определению, Φ r-мощнее, чем Φ, относительно класса Ξ, если $\underset{N}{\Phi}(\mathfrak{N}) \supset \underset{M}{\Phi}(\mathfrak{N})$ для любого $\mathfrak{N} \in \Xi$. Пусть N и L — две базы, состоящие из множеств натуральных чисел. L-преобразованием базы N, определенным последовательностью функций $\{f_k(n)\}$, называется совокупность множеств вида $\eta = \Sigma_{k \in \mathfrak{z}} \eta_k$, $\mathfrak{z} \in N$, $\eta_k \in f_k(L)$.

Пусть $\mathfrak{A}(L)$ — класс семейств, инвариантных относительно $\underset{L}{\Phi}$, $\mathfrak{B}(L)$ — класс семейств вида $\underset{L}{\Phi}(\mathfrak{N})$. Для того чтобы Φ была r-мощнее, чем Φ, относительно $\mathfrak{A}(L)(\mathfrak{B}(L))$, достаточно (необходимо), чтобы пополнение базы M совпадало с пополнением некоторого L-преобразования базы N. Не существует δs-операции, которая мощнее, чем любая другая δs-операция. Каково бы ни было множество δs-операций, мощность которого $\leqslant 2^{\aleph_0}$, существует δs-операция, которая мощнее, чем любая операция этого множества.

В гл. IV рассматриваются δs-операции над подмножествами метрического пространства. Пусть Φ^c — операция, дополнительная к Φ, и $\mathfrak{N}_0$ — некоторое семейство. $\mathfrak{N}_\alpha$ определяется как $\Phi(\Sigma_{\beta<\alpha}\mathfrak{N}_\beta)$ при α нечетном и как $\Phi^c(\Sigma_{\beta<\alpha}\mathfrak{N}_\beta)$ при α четном.

Если нормальная Φ мощнее счетного суммирования (пересечения), то, каково бы ни было семейство $\mathfrak{N}_0$, для любого $\alpha < \Omega$ существует Φ_α такая, что $\Phi_\alpha(\mathfrak{N}_0) = \mathfrak{N}_\alpha$.

Если R содержит гомеоморфный образ канторова множества, $\mathfrak{N}_0$ — семейство замкнутых подмножеств, Ψ — т. м. о., то $\Psi(\mathfrak{N}_0)$ не инвариантно относительно взятия дополнения.

Если нормальная Φ мощнее счетного суммирования (пересечения), $\mathfrak{N}_0$ — семейство замкнутых подмножеств R, содержащего гомеоморфный образ канторова множества, то все классы $\mathfrak{N}_\alpha$, $\alpha < \Omega$, попарно различны.

Если семейство $\mathfrak{N}$ подмножеств борелевского пространства содержит все замкнутые множества, имеет универсальное множество и инвариантно относительно непрерывного преобразования, декартова произведения, конечного пересечения, то существует Φ такая, что $\Phi_N(F) = \mathfrak{N}$, где F — семейство замкнутых множеств.

Если $\Phi(F)$ (F — семейство замкнутых множеств) инвариантно относительно пересечения с множествами типа G_δ, то $\Phi(F)$ инвариантно относительно гомеоморфного преобразования. Библ. 25 назв.

Примечание референта. В работе имеются опечатки. В доказательстве первой теоремы § 1 гл. IV, стр. 111, нельзя утверждать, что $\overline{E}_n \in \mathfrak{N}_{\beta_n}$ для всякого n. В доказательстве первой теоремы § 3 гл. IV говорится, что из $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ следует $\lim f_n(A) = f(A)$, что не всегда верно. Нечетко употребляется понятие базы δs-операции, так как данное в § 1 гл. II определение есть фактически определение полной базы.

Б. С. Содномов

3745 К. Работы по дескриптивной теории множеств. Ляпунов, Щегольков, Арсенин (Arbeiten zur deskriptiven Mengenlehre. Ljapunow A. A., Stschegolkow E. A., Arsenin W. J. (Math. Forschungsber. I.), Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 108 S.) (нем.)

Перевод статей по дескриптивной теории множеств, опубликованных в журнале «Успехи матем. наук», 1950, 5, № 5, 11—119.

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМАМИ И ИХ ОБОБЩЕНИЯМИ

3746. Интегралы и суммируемые тригонометрические ряды. Джеймс (Integrals and summable trigonometric series. James R. D.), Bull. Amer. Math. Soc., 1955, **61**, № 1, 1—15 (англ.)

Приводятся различные определения интеграла (интегралы Данжуа, Марцинкевича — Зигмунда и другие), возникшие в связи с решением проблемы представления по формулам Фурье коэффициентов всюду сходящегося (или суммируемого) тригонометрического ряда через его сумму.

Дается дескриптивное определение интеграла P^k, с помощью которого разрешается проблема о представлении по формулам Фурье коэффициентов тригонометрического ряда, когда последний суммируем всюду методом Чезаро $(C, 2)$, а члены сопряженного к нему ряда сходятся $(C, 2)$ к нулю. Указывается, как надо поступить, если данный ряд суммируем (C, k) с $k \geq 1$, где k — целое. П. Л. Ульянов

3747. О некоторых свойствах почти-периодических функций в связи со свойствами их спектров. Гринпун З. С., Бюл. наук. студ. конференції 1954 року, част. 2, Львів, Вид-во ун-ту, 1955, 101—102

3748. О функциях Лебега лагранжевой интерполяции. Фрёйд (A Lagrange-féle interpoláció Lebesgue-függvényeiről. Freud Géza), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1953, **3**, № 4, 563—568 (венг.)

Статья автора (РЖМат., 1954, 4786) на венгерском языке.

3749. О решении Полларда проблемы аппроксимации С. Н. Бернштейна. Видав (Sur la solution de H. Pollard du problème d'approximation du S. Bernstein. Vidav Ivan), C. r. Acad. sci., 1954, **238**, № 20, 1959—1961 (франц.)

Примем обозначения РЖМат, 1955, 1716. Автор показывает, что если функция $K(u)$ удовлетворяет условию в), то для выполнения условия б), т. е. для полноты системы $\{P(u)K(u)\}$ в C_0, достаточно, чтобы функция $1/K(u)$ не являлась целой функцией.

Заметим, что из теорем 1—3 референта (реф. 3750) непосредственно следует более общий результат, а именно: для полноты $\{P(u)K(u)\}$ при условии в) достаточно, чтобы функция $1/K(u)$ не являлась целой функцией порядка, меньшего или равного единице.

С. Н. Мергелян

3750. О весовых приближениях многочленами. Мергелян С. Н., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 4, 597—600

При произвольной ограниченной функции $h(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$ рассматривается пространство C_h всех непрерывных функций $f(x)$ $(-\infty < x < \infty)$, для которых $h(x)f(x) \to 0$ $(\pm x \to \infty)$, с нормою $\|f\|_h = \sup_{-\infty<x<\infty} h(x)|f(x)|$. Через $\mathfrak{M}_h$ обозначается совокупность всех многочленов с нормою $\leqslant 1$ и вводится функция $M_h(z) = \sup_{P\in\mathfrak{M}_h} |P(z)|$. Даны формулировки и намечены доказательства трех предложений.

Теорема 1. Возможны лишь два случая: либо $M_h(z) \equiv \infty$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$, либо всюду $M_h(z) < \infty$, причем для любого $\varepsilon > 0$

$$M_h(z) < e^{|z|^{1+\varepsilon}} \quad (|z| > R_\varepsilon). \tag{1}$$

Теорема 2. Для полноты системы всех многочленов в пространстве C_h необходимо и достаточно, чтобы $M_{h/(1+|x|)}(z) \equiv \infty$ при $\operatorname{Im} z \neq 0$.

Теорема 3. Если система всех многочленов не полна в C_h, то те функции, для которых

$$\inf_{\{P\}} \|f - P\|_h = 0, \tag{2}$$

обязаны быть целыми не выше первого порядка, причем $|f(z)| \leqslant M_h(z)\|f\|_h$.

Далее вместо приближения на действительной оси рассматривается приближение на произвольном нигде не плотном замкнутом множестве E, разбивающем плоскость на конечное число неограниченных областей $CE = D_1 \cup D_2 \cup \cdots \cup D_n$. Доказана

Теорема 4. Если $G(z)$ — произвольная функция, для которой: 1) $|G(z)| \leqslant 1$ $(z \in E)$, 2) $\sup_{z\in D_k} |G(z)| > 1$ $(k = 1,2,\ldots,n)$, то для полноты системы всех многочленов на E при весе $h(z)$ достаточно, чтобы для любого $p > 0$ при $z \to \infty$, $z \in E$ выполнялось соотношение

$$[H(2|z|)]^p h(z) \to 0, \quad H(R) = \max_{|z|<R} |G(z)|.$$

В связи с теоремой 4 отмечается диссертация М. М. Джрбашяна (Ереван, 1948), в которой для частного случая получен более точный критерий.

Примечание референта. Первые три теоремы посвящены проблеме С. Н. Бернштейна, поставленной и для частных случаев решенной еще в 1923 г. и имеющей большую литературу. Полное решение этой и несколько более общей проблемы дано в статьях референта и С. Н. Бернштейна (РЖМат, 1955, 683, 1153). Теоремы 1—3 реферируемой статьи эквивалентны содержащимся в этих статьях предложениям. При этом в теоремы 2 и 3 должны быть внесены надлежащие уточнения, так как теорема 3 явно неверна, если, например, $h(x) \equiv 0$ в каком-нибудь интервале, а доказательство необходимости в теореме

2, использующее (1), не проходит без некоторого дополнительного предположения о множестве точек, где $h(x) \neq 0$ (в указанных выше статьях при доказательстве эквивалентного критерия предположено, что это множество имеет предельную точку на конечном расстоянии). Далее заметим, что неравенство (1) можно заменить более точным $M_h(z) < Ae^{\sigma|z|}$ (A и σ — постоянные) (см. замечание в конце первой из вышеуказанных статей). Теорема 4 является новой. Н. И. Ахиезер

Примечание редакции. 1) В формулировке теоремы 2 редакцией учтена поправка автора (реф. 3751); 2) В теореме 3 (где предположена неполнота) из равенства (2) следует, что f целая не выше 1-го порядка с точностью до множества, где $h(x) = 0$.

3751. Поправка. Мергелян С. Н., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 2, 196

К реф. 3750.

3752. О полноте и компактности семейств аналитических функций. Мергелян С. Н., Успехи матем. наук, 1955, 10, № 1, 191—192

Вначале излагается ранее опубликованный результат (РЖМат, 1955, 2631). Далее рассматривается приближение непрерывных на бесконечной оси функций с помощью полиномов с весовой функцией $h(x)$ (реф. 3750). Отмечается, что для полноты системы полиномов в той или иной метрике необходимо и достаточно, чтобы семейство полиномов, равномерно ограниченное в данной метрике, не являлось компактным ни в одной области, лежащей вне множества, на котором рассматривается полнота. В одном частном случае связь между вопросами полноты и нормальности семейства полиномов ранее была установлена А. Л. Шагиняном (РЖМат, 1954, 1629). М. Г. Хапланов

3753. Об одном обобщении теоремы Мандельбройта. Видав (Sur une généralisation d'un théorème de M. S. Mandelbrojt. Vidav Ivan), C. r. Acad. sci., 1954, 238, 2138—2140 (франц.)

Результаты этой заметки подробно изложены в статье автора (реф. 3754).

3754. Об аппроксимационной задаче С. Н. Бернштейна и ее обобщениях. Видав (Sur le problème d'approximation de S. Bernstein et ses généralisations. Vidav Ivan), Acta math., 1954, 91, № 3—4, 303—316 (франц.)

Развернутое изложение результатов двух заметок автора (реф. 3749, 3753). Наряду с задачей приближения алгебраическими многочленами на всей действительной оси (реф. 3749), рассматривается ее обобщение на случай произвольного замкнутого множества $E \subset (-\infty, \infty)$ (см. также реф. 3753).

Пусть $K(u)$, $u \in E$ — непрерывная функция на E. Обозначим через $C_0(E)$ пространство всех непрерывных на E функций $f(u)$ с $f(u) \to 0$ при $|u| \to \infty$, причем $\|f\| = \max_E |f(u)|$. Изучается вопрос о полноте в $C_0(E)$ системы $\{P(u)K(u)\}$, где $P(u)$ пробегает совокупность всех алгебраических многочленов. Относительно $K(u)$ предполагается, что существует последовательность многочленов $p_n(u)$, для которой при $u \in E$ и $n \to \infty$

$$p_n(u)K(u) \to 1, \quad |p_n(u)K(u)| \leqslant M. \qquad (1)$$

При этом предположении доказываются, в частности, теоремы:

1. Система $\{P(u)K(u)\}$ полна, если $1/K(u) \neq p(u)$, $u \in E$, где $p(z)$ — любая целая функция.

2. Система $\{P(u)K(u)\}$ полна, если

$$\int_E |\ln|K(u)|| \exp\left\{-\int^{|u|} \frac{dt}{[v(t)+v(-t)]\,t}\right\} \frac{du}{|u|} = \infty, \qquad (2)$$

где $v(x)$, $-\infty < x < \infty$ — какая-нибудь непрерывная функция со свойствами: а) $v(x)$ имеет производную $v'(x)$ с $x^{1/2}v'(x) \in L_2(-\infty, \infty)$; б) $v(x) = 1/2$ для $x \in E_h = \bigcup_{x \in E}[xe^{-h}, xe^{h}]$, $h > 0$, $1/2 \leqslant v(x) \leqslant 3/2 - \varepsilon$ для $x \notin E_h$, где $0 < \varepsilon < 1$.

Теорема 2 является модификацией теоремы Мандельбройта, в которой есть условие, аналогичное (2), а вместо (1) предполагается, что $-\ln K(u)$ — выпуклая функция от $\ln u$ (Mandelbrojt S., Rice Inst. Pamphlet, 1951, 38). А. А. Конюшков

3755. Проблема аппроксимации С. Н. Бернштейна. Поллард (The Bernstein approximation problem. Pollard Harry), Proc. Amer. Math. Soc., 1955, 6, № 3, 402—411 (англ.)

Работа примыкает к статье автора (РЖМат, 1955, 1716), в которой рассматривалось пространство C_0 всех непрерывных функций $f(x)$ ($-\infty < x < \infty$) с $\lim_{\pm x \to \infty} f(x) = 0$, причем $\|f\| = \max_{-\infty < x < \infty} |f(x)|$. Ищется критерий полноты в C_0 множества функций вида $P(x)/\Phi(x)$, где $\Phi(x) > 0$ — непрерывная функция с $\lim_{x \to \infty} x^n/\Phi(x) = 0$ ($n = 0,1,2,\ldots$), а $P(x)$ пробегает совокупность всех многочленов. Доказывается, что для этой полноты необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln^+|P(x)|}{1+x^2}\,dx = \infty, \qquad (1)$$

где $P(x)$ пробегает множество всех многочленов, для которых $|P(x)| < \Phi(x)$ ($-\infty < x < \infty$). (Эта теорема, однако, уже была доказана ранее в цитируемой автором статье С. Н. Бернштейна и референта (РЖМат, 1955, 1153). Автор ошибочно считает, что в ней теорема была доказана лишь для функций $\Phi(x)$, четных и монотонно возрастающих при возрастании $|x|$. *Реф.*). Доказательство автора сложно и потребовало нескольких лемм. В статье содержится также обобщение теоремы на случай пространства функций на полуоси $x > 0$. Кроме того, проблема аппроксимации С. Н. Бернштейна ставится и решается для пространства L^p ($p \geqslant 1$). Здесь предполагается, что почти всюду $\Phi(x) > 0$, а также что $x^n/\Phi(x) \in L^p$ ($n = 0,1,2,\ldots$). Для полноты необходимо и достаточно выполнение равенства (1), где $P(x)$ теперь пробегает совокупность всех многочленов, для которых $\|P(x)/\Phi(x)\|_p < 1$.

Н. И. Ахиезер

3756. Несколько замечаний по поводу аппроксимационной задачи С. Н. Бернштейна. Мергелян С. Н., Докл. АН АрмССР, 1955, 20, № 4, 113—119 (рез. арм.)

Примем обозначения реф. 3750. Рассматривается задача: каким условиям должна удовлетворять функция $h(x)$, чтобы система всех алгебраических многочленов $\{P(x)\}$ была полна в пространстве C_h, т. е. для любой $f \in C_h$ $\inf_P \|f - P\|_h = 0$. Автор подчеркивает, что эта «аппроксимационная задача С. Н. Бернштейна пока еще далека от своего полного решения» непосредственно в терминах быстроты убывания. Указывается, что она полностью решена в случае, когда $|x|\,h'(x)/h(x) \downarrow -\infty$ при $|x| \to \infty$: необходимое и достаточное условие полноты заключается в расходимости интеграла $\int_{-\infty}^{\infty} (1+x^2)^{-1} \ln h(x)dx$ (литературу см. РЖМат, 1955, 684; кроме того, Шагинян А. Л., Сообщ. Ин-та матем. и механ. АН АрмССР, 1947, № 1). Из ряда работ, характеризующих полноту не непосредственно в терминах быстроты убывания $h(x)$, а через другие свойства $h(x)$, отмечаются 4 работы (РЖМат, 1955, 683, 1153, 1716; 1956, 3750).

Приводятся замечания, позволяющие судить «о специфике и трудностях» прямого «решения задачи в общем случае». Отметим два из них.

1. Пусть $\mu(x) \geqslant 0$ — функция с $\mu(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$. Из полноты системы $\{P\}$ с весом $\mu(x)h(x)$, вообще говоря, не следует полнота с весом $h(x)$.

2. Пусть $\nu(x) \geqslant 0$ — функция с $\nu(x) = o(|x|^{-k})$, $k = 1,2,\ldots$ Существует вес $h(x)$, при котором система $\{P\}$ полна, причем $h(x) \geqslant \nu(x)$ на некоторой $\{x_n\}$, $x_n \to \infty$.

Доказательства основываются на критерии полноты для веса $h(x)$ с $h(x) = 0$ для $x \neq \lambda_n$, $|\lambda_n| \to \infty$, $n \to \infty$, выводимом из теорем Холла (Hall T., On polynomials bounded at infinity of points, Uppsala, 1950) с помощью теоремы 2 автора (см. реф. 3750). (Доказательство необходимости условия теоремы 2 легко получается непосредственно без использования неравенства $M_h(z) < e^{|z|^{1+\varepsilon}}$ при любом ограниченном весе $h(x)$. *Реф.*)

Пусть $\{\lambda_n\}$, $n = 1,2,\ldots$ — последовательность комплексных чисел с $|\lambda_{n+1}/\lambda_n| > \Lambda > 1$, $B(z) = \prod_1^\infty (1 - \lambda_n^{-1} z)$, $M_B(r) = \max_{|z| \leqslant r} |B(z)|$. Пусть $G(z)$ — произвольная целая функция с $M_G(r) = \max_{|z| \leqslant r} |G(z)|$. Тогда, в частности, а) $G(z) \equiv 0$, если $M_G(r) = o(M_B(r))$ и $G(\lambda_n) = 0$, $n = 1,2,\ldots$; б) $G(z) \equiv \text{const}$, если $\ln M_G(r) = o(\ln M_B(r))$ и $G(z)$ ограничена на $\{\lambda_n\}$.

А. А. Конюшков

3757 К. Теория аппроксимации. Ахиезер (Teorie aproximací. Achijezer N. J. Praha, ČSAV, 1955, 342, [1] str., 70 Kčs), Bibliogr. katalog ČSR. České knihy, 1955, № 27, 681 (чеш.)

Перевод книги Н. И. Ахиезера «Лекции по теории аппроксимации» (М.— Л., Гостехиздат, 1947).

3758 К. Приближение функций при помощи многочленов Чебышева. Небауэр (Annäherung von Funktionen mit Hilfe Tschebyscheffscher Polynome. Näbauer Martha (Dt. Geodät. Kommission bei der Bayer. Akad. Wiss. Veröff. A N13), München, Verl. Bayer. Akad. Wiss., 1955, 14 S., 4.—DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, A, № 31, 1694 (нем.)

3759 Д. О сходимости рядов Фурье функций с интегрируемым квадратом. Темко К. В. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Моск. обл. пед. ин-т, М., 1955

3760 Д. Сравнение двойных сингулярных интегралов. Духовный М. А. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Днепропетр. ун-т, Днепропетровск, 1955

См. также: 3602, 3606, 3614, 3615, 3726, 3727, 3761, 3771, 3874, 3877, 3911, 3931, 3936, 3942, 3943, 3944, 3970

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

3761. Обобщение второй теоремы Абеля. Давыдов Н. А., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3, 135—138

1. Обобщается известная теорема Абеля на случай, когда в точке ξ единичной окружности $\Gamma(|x| = 1)$ сходится некоторая подпоследовательность частных сумм ряда $\sum_0^\infty a_n x^n = f(x)$. Доказываются две теоремы. В первой теореме даются достаточные условия того, что $\lim_{x \to 1} f(x) = \overline{\lim}_{n \to \infty} S_n$, будет ли последний конечным или бесконечным.

Теорема 2. Если 1) $\lim_{k \to \infty} S_{n_k - 1} = S$,

2) $\sum_{k=1}^\infty [(p_k - n_k)/p_k] |\bar{\sigma}_k| < \infty$, 3) $\sum [(p_k - n_k)/p_k] |\sigma_k| < \infty$, то $\lim_{x \to 1} f(x) = S$.

Здесь $S_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$, $\sigma_k = S_{n_{k+1}-1} - S_{n_k - 1}$, $\bar{\sigma}_k$ — сумма всех отрицательных членов a_n, содержащихся в σ_k, a_n — действительные и равны нулю для n, удовлетворяющих неравенству $n_k < p_k < n < n_{k+1}$. Отметим также следствие 2: Пусть ряд $\alpha_0/2 + \sum_{k=1}^\infty (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx)$ является рядом Фурье суммируемой функции $\psi(x)$ и E — множество точек отрезка $[-\pi, \pi]$. Если 1) $\alpha_n = \beta_n = 0$ для n, удовлетворяющих неравенству $n_k < p_k < n < n_{k+1}$,

$$2)\ \lim_{k \to \infty} S_{n_k - 1} = \lim_{k \to \infty} \left(\alpha_0/2 + \sum_{k=1}^{n_k - 1} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx \right) \lambda(x), \quad x \in E,$$

3) $\sum_{k=1}^\infty (p_k - n_k)^2/p_k] < \infty$, то $\lambda(x) = \psi(x)$ для почти всех $x \in E$.

2. С помощью полученных результатов изучается роль условия $n_{k+1}/n_k > \lambda > 1$ в известной теореме Харди — Литтльвуда. Доказывается, что это условие в определенном смысле нельзя улучшить. Именно, имеет место

Теорема 4. Для всякой монотонно возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющей условию

$$\lim_{p \to \infty} \frac{n_{k_p} + \mu_p}{n_{k_p}} = 1, \ \lim_{p \to \infty} \mu_p = \infty,$$

где $k_p < k_{p+1}$ $(p = 1, 2, \ldots)$, в частности, для всякой монотонно возрастающей последовательности натуральных чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющей условию $\lim_{k \to \infty} n_{k+1}/n_k = 1$, и любого $\varepsilon > 0$ можно построить расходящийся ряд $\sum_{n=0}^\infty a_n$, суммируемый методом Чезаро (и тем более методом Абеля) к конечному числу и такой, что $a_n = 0$ для $n \neq n_k$, $\sum_{n=0}^\infty |a_n|^{1+\varepsilon} < \infty$.

В. В. Иванов

3762. О сходимости тригонометрического интерполирования аналитических функций. Киш О., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 3, 449—450

Пусть $\{x_k^{(n)}\} \equiv X$ есть матрица $(n = 1,2,\ldots; k = 1,2,\ldots, 2n-1)$, составленная из вещественных чисел, расположенных в промежутке $0 \leqslant x < 2\pi$; $n[a, b)$ — число элементов n-й строки X, лежащих на отрезке $a \leqslant x < b$, принадлежащем этому промежутку. Пусть существует «предельная плотность» узлов

$$\rho(x) = \lim_{\substack{a \to x-0 \\ b \to x+0}} \frac{n[a, b)}{(2n+1)(b-a)}.$$

Теорема 1. Для того чтобы тригонометрический интерполяционный процесс сходился при всех x для любой 2π-периодической и аналитической на вещественной оси функции $f(x)$, необходимо и до-

статочно, чтобы при всяких $x\,(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$ предельная плотность $\rho(x)$ существовала и была величиной постоянной, равной $1/2\pi$. При выполнении названного условия сходимость интерполяции — равномерная на всей оси.

Теорема 2. Этот результат, касающийся тригонометрической интерполяции, сопоставляется с иным интерполяционным процессом $f_n(x)\to f(x)$, где $f_n(x)\equiv \equiv \sum_{k=0}^{n}(a_k \operatorname{Re} z^k + b_k \operatorname{Im} z^k)$ — гармонический многочлен, возникающий из $f(x)$ посредством интерполяции по узлам $\exp ix_k^{(n)}$. Последовательность $\{f_n\}$ сходится в замкнутом круге $|z|\leqslant 1$ в том и только том случае, если предельная плотность $\rho(x)$ существует при всяких $0\leqslant x<2\pi$ и равна постоянной $1/2\pi$.

Отсюда следует, что при любом выборе узлов $x_k^{(n)}$ тригонометрической интерполяции процесс равномерно сходится (на всей оси) для всякой функции $f(x)$, 2π-периодической и аналитической в полосе $|\operatorname{Im} z|\leqslant \leqslant 2\ln(1+\sqrt{2})$. В. Л. Гончаров

3763. Об одном классе рациональных интерполяционных рядов. Миронов В. Т., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 2, 215—218

Обобщая и дополняя результаты Лагранжа (Lagrange R., Acta Math., 1935, **64**), автор доказывает ряд теорем о сходимости рядов

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n \Pi_n(z), \qquad (1)$$

где

$$\Pi_n(z)=(1-z/u)\ldots(1-z/un^{1/q})(1-z/v)\ldots(1-z/vn^{1/q}),$$

$c_n = a_n(u/v)^n$, u, v, q — постоянные числа, $q>0$, $u\neq v$, $u\neq 0$, $v\neq 0$, и росте функции $S(z)$ — суммы сходящегося ряда.

Приведем некоторые результаты автора. 1. Если N_q — ряд (т. е. ряд (1)) при $q<1$ сходится в точке $z_0\neq un^{1/q}$, то он сходится во всей плоскости, за исключением точек $\{vn^{1/q}\}$, причем сходится равномерно в любой ограниченной области $Q'\subset Q_v$ (z_0 — точка на пересечении областей $Q_v(|z-vn^{1/q}|\geqslant\sigma)$ и $Q_u(|z-un^{1/q}|\geqslant\sigma)$, где $\sigma>0$, $n=1,2,\ldots$). 2. Если N_q — ряд при $q<1$ сходится абсолютно в точке $z_0\neq un^{1/q}$, то он сходится абсолютно во всей плоскости, за исключением точек $\{vn^{1/q}\}$. 8. Всякий N_q-ряд при $q\geqslant 1$ имеет полуплоскость сходимости $\operatorname{Re}(1/u-1/v)z>\lambda$. 11. Сумма N_q-ряда является мероморфной функцией в полуплоскости сходимости, причем она может иметь только простые полюсы в точках $\{vn^{1/q}\}$. 12. Если $q<1$ или $q\geqslant 1$ и $\lambda=-\infty$, то сумма сходящегося N_q-ряда на пересечении области его сходимости с областью V_q удовлетворяет неравенству $|S(z)|<e^{r^q}[H_q(\theta)+\varepsilon]$, где $\varepsilon>0$, $r=|z|$ достаточно большое число, $H_q(\theta)$ — определенная функция от $\theta=\arg z$, ($|\theta|\leqslant\pi$). А. Х. Турецкий

3764. Экстремальные точки выпуклой оболочки однолистных функций. Шпрингер (Extreme Punkte der konvexen Hülle schlichter Funktionen. Springer George), Math. Ann., 1953, **129**, № 2, 230—232 (нем.)

Пусть F — класс функций $f(z)$, регулярных в области G, и S — подкласс однолистных функций из F, нормированных условиями: $f(z_0)=w_0$, $f'(z_0)=1$, где z_0 — фиксированная точка из G. Подмножество M функций $f(z)$ из класса F назовем выпуклым, если для каждой пары функций $f(z)$ и $g(z)$ из M все линейные комбинации $\lambda f(z)+(1-\lambda)g(z)$ с $0\leqslant\lambda\leqslant 1$ также принадлежат M. Выпуклой оболочкой K_M для подмножества M из F назовем пересечение всех выпуклых множеств из F, содержащих M. Элемент $f\in M$ назовем средней точкой, если найдутся два элемента g и h из M и число λ, $0<\lambda<1$, такие, что $f=\lambda g+(1-\lambda)h$. Элемент выпуклого множества M из F назовем экстремальной точкой для M, если он не является средней точкой. Представляет значительный интерес охарактеризовать однолистные функции из S, которые являются экстремальными точками для K_s. Пусть теперь F — класс функций $f(z)=z+a_1/z+a_2/z_2+\ldots$, регулярных в $1<|z|<\infty$, и S — подкласс однолистных функций из F. Число $\|f\|=\sqrt{\sum_{k=-1}^{\infty} k|a_k|^2}$ назовем нормой элемента f. Обозначим через J функцию $f(z)=z$. Множество функций $f(z)\in F$, для которых $\|f-J\|\leqslant 1$, обозначим через Σ.

В работе элементарно доказано: 1) если дополнение к образу области $|z|>1$ при отображении функцией $f(z)\in S$ имеет площадь, равную нулю ($\|f-J\|=1$), то f — экстремальная точка для K_s; 2) если образ области $|z|>1$ при отображении функцией $f(z)\in S$ имеет внешнюю точку, то f — средняя точка для K_s. Кроме того, в работе по произвольному ε, $0<\varepsilon<1$, построена функция $f(z)\in\Sigma$, но $f(z)\overline{\in}K_s$, такая, что f отстоит от J не более, чем на ε ($\|f-J\|\leqslant\varepsilon$). Н. А. Лебедев

3765. О k-кратном симметричном, звездообразном, однолистном отображении единичного круга. Воделанн (Über k-fach symmetrische, sternförmige, schlichte Abbildungen des Einheitskreises. Waadeland Haakon), Math. scand., 1955, **3**, № 1, 150—154 (нем.)

Пусть функции

$$g_k(z)=z+a_{k+1}^{(k)}z^{k+1}+\cdots+a_{pk+1}^{(k)}z^{pk+1}+\cdots,\ k=1,2,\ldots$$

однолистны и регулярны в $|z|<1$ и отображают круг $|z|<1$ на звездообразные области. Двумя методами получены точные оценки коэффициентов:

$$\left|a_{k+1}^{(k)}\right|\leqslant\Pi_{\nu=1}^{p}\left(1-\frac{k-2}{\nu k}\right)$$

Примечание референта. Оценки эти были получены ранее Г. М. Голузиным (Матем. сб., 1929, **36**, вып. 2.). Б. Н. Рахманов

3766. Распространение теоремы Гросса о звезде. Каплан (Extensions of the Gross star theorem. Kaplan Wilfred), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 2, 105—108 (англ.)

Усиливаются и дополняются результаты предыдущей статьи автора (Kaplan W., Ann. Acad. Sci. Fennicae, Ser. **A. I.**, Math.-Phys., 1951, № 86, 1—23).

Теорема 1. Обозначим через $t=h(S)$ полунепрерывную снизу функцию для $0<s<1$, причем $0<b\leqslant\leqslant h(s)\leqslant+\infty$. Пусть $w=\psi(\sigma)$ ($\sigma=s+it$) однолистна в области G: $0<s<1$, $-b<t<h(s)$. Пусть B — замкнутое счетное множество расширенной плоскости. Допустим, что для некоторого множества $E\subset(0,1)$:

$$\lim_{n\to\infty}\psi(s+it_n)\in B,\ h(s)<+\infty$$

для каждой последовательности $t_n\to h(s)$, когда $\lim_{n\to\infty}\psi(s+it_n)$ существует (может быть и бесконечный). Тогда $\operatorname{mes}E=0$.

Теорема 2. При дополнительном условии $|\psi(\sigma)|\leqslant 1$ теорема 1 справедлива, если B — замкнутое подмножество на $|z|=1$, имеющее емкость нуль. Пусть область G та, которая описана в теореме 1 и $w=f(\sigma)$, $\sigma=s+it$, мероморфна в G. Для каждого фиксированного s $w=f(s+it)$ определяет путь γ_w^s, причем $0\leqslant t<h(s)$ Допустим, что в некоторой области D дана мероморф

ная функция $w=\Phi(z)$. Предположим, что существует такой регулярный элемент $z(w)$ обратной к $\Phi(z)$ функции, что $z[f(\sigma)]=\psi(\sigma)$ имеет смысл для $0<s<1$, $|t|<b$. Предположим, что $z(w)$ может быть продолжена вдоль каждого пути γ_w^s для $0\leqslant t<h_1(s)$ и не далее. Эти продолжения определяют $\psi(\sigma)$ как мероморфную функцию в области $0<t<h_1(s)$, $0<s<1$ и $\Phi(\psi(\sigma))=f(\sigma)$. Кривая $z=\psi(s+it)$ для каждого фиксированного s есть путь γ_z^s в области D и если $h_1(s)<h(s)$, то или γ_z^s достигает критической точки, когда $t\to h_1(s)$, или γ_z^s является асимптотическим путем для $\Phi(z)$ относительно некоторой граничной компоненты. (Если, к примеру, $f(\sigma)=\alpha\sigma+\beta$ и $h(s)\equiv+\infty$, то $\{\gamma_w^s\}$ — семейство параллельных линий и исследуется продолжение $z=z(w)$ вдоль них; если $f(\sigma)=e^\sigma$, то $\{\gamma_w^s\}$ — семейство радиусов — как в теореме Гросса о звезде).

Теорема 3. Пусть D — расширенная плоскость минус счетное замкнутое множество B. Тогда $h_1(s)=h(s)$ для почти всех s, т. е. обратная функция к $w=\Phi(z)$ может быть продолжена неограниченно вдоль почти всех кривых γ_w^s.

Теорема 4. Пусть D — область $0<|z|<1$. Тогда там, где $h_1(s)<h(s)$ или а) $|\psi(s+it)|\to 1$, когда $t\to h_1(s)$, или б) $\psi(\sigma)\to 0$ или $\psi(\sigma)\to\infty$ критической точке $\Phi(z)$, когда $t\to h_1(s)$. Случай б) имеет место лишь для множества значений s меры нуль.

Теорема 5. Пусть D — единичный круг $|z|<1$, а B — замкнутое множество емкости нуль на окружности $|z|=1$. Обозначим через E подмножество $(0, 1)$, состоящее из тех s, для которых $h_1(s)<h(s)$ и последовательность $\psi(s+it_n)$ имеет все предельные точки в B для каждой последовательности $t_n\to h_1(s)$. Тогда $\operatorname{mes} E=0$. С. Я. Хавинсон

3767. О вариации конформного отображения переменной области. Гарнье (Sur la variation de la représentation conforme d'un domaine variable. Garnier René), Rend. mat. e appl., 1954, 14, № 1—2, 258—267 (франц.)

Пусть D и $\{D_1\}$ — односвязные, содержащие точку $z=z_0$ области, ограниченные замкнутыми жордановыми кривыми C и $\{C_1\}$ без двойных точек, с равномерно ограниченной средней кривизной, удовлетворяющими следующему условию: для каждого достаточно малого $\varepsilon>0$ можно указать кривую C_1 семейства $\{C_1\}$ такую, что всякой точке $z_1\in C_1$ соответствует одна точка $z\in C$, нормаль к C в которой проходит через z_1, причем $|z-z_1|$ и угол между отрезком (zz_1) и нормалью к C_1 в точке z_1 не превышают соответственно $k_1\varepsilon$ и $k_2\varepsilon$ (k_1 и k_2 — фиксированные положительные постоянные, не зависящие от ε); $\delta(z)=z_1-z$ — вариация границы по нормали к кривой C; $Z=f(z)$, $f(z_0)=0$, $f'(z_0)>0$ и $Z=f_1(z)$, $f_1(z_0)=0$, $f_1'(z_0)>0$ — функции, конформно отображающие D и D_1 на $|Z|<1$.

Доказывается вариационная формула Жюлиа (Julia G., Ann. Sc. Ecole Norm. Supér., 3-e sér., 1922, 39, 1):

$$\delta f(z)=f_1(z)-f(z)=\frac{f(z)}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)+f(t)}{f(z)-f(t)}\frac{f'^2(t)}{f^2(t)}\delta_t z\,dt$$

при указанных более общих предположениях, чем у Жюлиа (который рассматривал при выводе случай областей, ограниченных аналитическими кривыми). Доказательство выполнено сначала для семейства вложенных друг в друга областей, после чего результат распространяется на общий случай. Формула Жюлиа следует как частный случай из вариационной формулы референта (Матем. сб., 1943, 13(55), № 1. 111—117), которая, в частности, для семейства вложенных друг в друга областей выведена при значительно более общих предположениях, чем в реферируемой статье.

П. П. Куфарев

3768. Об одной экстремальной задаче теории регулярных конечномноголистных аналитических в круге функций. Дундученко Л. Е., Изв. Киевск. политехн. ин-та, 1954 (1955), 16, 275—283

В классе функций $f(z)$, регулярных в круге $|z|<1$, нормированных условиями $f(0)=0$, $f^{(p)}(0)=p!$ $(p\geqslant 1)$ и отображающих этот круг на p-листные выпуклые области, устанавливаются точные нижняя и верхняя границы кривизны $K_r(\alpha)$ линий уровня (образов окружностей $|z|=r<1$, $z=re^{i\alpha}$):

$$\frac{1+r}{1-r}\frac{(1-r)^{2p}}{r^p}\leqslant K_r(\alpha)\leqslant$$

$$\leqslant\begin{cases}\dfrac{1-r}{1+r}\dfrac{(1+r)^{2p}}{r^p}, & 0<r\leqslant r_p,\\[2ex] \dfrac{2r^{1-p}}{e}(1-r^2)^{p-1}\dfrac{1}{p\ln[(1+r)/(1-r)]}\left(\dfrac{1+r}{1-r}\right)^{p(1+r^2)/2r}, & r_p<r<1,\end{cases}$$

где $r_p\geqslant\dfrac{\sqrt{p}-1}{\sqrt{p}+1}$ и определяется уравнением $2r_p/(1-r_p)^2=p\ln[(1+r_p)/(1-r_p)]$.

Нижняя граница для всех $r<1$ и верхняя для $r\leqslant r_p$ достигаются функцией $F_\vartheta(z)=p\int_0^z\dfrac{\zeta^{p-1}d\zeta}{(1-\zeta e^{-i\vartheta})^{2p}}$, $-\pi\leqslant\vartheta\leqslant\pi$. Верхняя граница для $r<r_p$ достигается функцией

$$F_\vartheta(z)=p\int_0^z\frac{\zeta^{p-1}d\zeta}{(1-\zeta e^{-i\vartheta})^{2p\lambda}(1+\zeta e^{-i\vartheta})^{2p(1-\lambda)}},\quad 0<\lambda<1.$$

Доказательства основаны на использовании структурной формулы функций рассматриваемого класса, установленной В. А. Зморовичем, и на применении одного, принадлежащего ему, вариационного метода (Зморович В. А., Укр. матем. ж., 1952, 4, № 3).

Примечание референта. В выражении верхней границы кривизны для $r>r_p$, данном автором, пропущен множитель $(1-r^2)/r^p$. Г. В. Корицкий

3769. Функция U-класса и ее приложения. Цудзи (Function of U-class and its applications. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1955, 7, № 2, 166—176 (англ.)

Пусть $w=f(z)$ регулярна в $|z|<1$ и $|f(z)|<1$, $f(e^{i\theta})$ — угловое граничное значение $f(z)$ в точке $e^{i\theta}$. Если для почти всех θ $|f(e^{i\theta})|=1$, то f принадлежит U-классу (классу A по Сейделу (Trans. Amer. Math. Soc., 1934, 36, 201—226)). Если $(f(z)-a)/\rho\in U$, то $f(z)\in U_\rho(a)$. Пусть $f(z)\in U$ и F — ее риманова поверхность над $|w|<1$, F_ρ — связный кусок F, лежащий над K: $|w-a_0|<\rho$, $|a_0|+\rho\leqslant 1$. Пусть над $a\in K$ лежит $n(a)$ точек F_ρ, $n_0=\sup n(a)$. Показано, что $n(a)=n_0$ для всех $a\in K$, за возможным исключением в случае $n_0=\infty$ множества логарифмической емкости нуль. Далее показано, что если Φ — открытая риманова поверхность с нулевой границей над w-плоскостью, Φ_ρ — ее связный кусок, лежащий над $|w-a|<\rho$,

и функция $w=\varphi(\zeta)$ отображает универсальную накрывающую Φ_ρ на $|\zeta|<1$, то $\varphi(\zeta)\in U_\rho(a_0)$.

Аналогичный результат получен, если Φ — риманова поверхность, на которой однозначна аналитическая функция $z=z(w)$, определяемая уравнением $G(z, w)=0$, где $G(z, w)$ — целая функция от z и w.

С помощью этих теорем и некоторых вспомогательных утверждений получен ряд теорем о распределении значений функций, соответствующих римановым поверхностям с нулевой границей или определяемых уравнением $G(z, w)=0$, а также о граничных значениях мероморфной функции в неизолированной точке границы области существования. Почти все эти теоремы не новы (принадлежат автору, Носиро, Нагаи, Жюлиа и др.), но использование ф-ций U-класса устанавливает единый подход к их доказательству. А. А. Гольдберг

3770. Теорема о некоторых классах особенностей, определяемых с помощью граничных множеств. Коллингвуд (A theorem on certain classes of singularities defined by cluster sets. Collingwood E. F.), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 4, 422—424 (англ.)

Содержится следующее дополнение к теореме 5 статьи автора (РЖМат, 1956, 368; см. также РЖМат, 1955, 5738; там же см. обозначения): $e^{i\theta}\in W(f)$, если $C(f, e^{i\theta})$ есть вся w-плоскость. Показано, что $W(f)\setminus J(f)$ и $W(f)\setminus S(f)$ суть множества 1-й категории. Это следствие более поздней теоремы автора (РЖМат, 1956, 1279). А. А. Гольдберг

3771. О теореме Ф. и М. Рисса. Хельсон (On a theorem of F. and M. Riesz. Helson Henry), Colloq. math., 1955, **3**, № 2, 113—117 (англ.)

Дается новое доказательство теоремы Ф. и М. Рисса (Привалов И. И., Граничные свойства аналитических функций, изд. 2-е, Гостехиздат, 1950, 101). Н. А. Давыдов

3772. О решении плоской задачи Дирихле. Цин (Contributo alla risoluzione del problema piano di Dirichlet. Zin Giovanni), Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1953, **14**, № 6, 750—754 (итал.)

Приводятся формулировки результатов, опубликованных автором с подробными доказательствами в другой статье (РЖМат, 1955, 3714). И. Н. Карцивадзе

3773. О задаче Римана — Привалова в теории аналитических функций. Хведелидзе Б. В., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3, 165—171

Изучаются некоторые свойства функций, представимых интегралами типа Коши, и полученные результаты применяются к решению граничной задачи теории аналитических функций вида (см. например, Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946):

$$\varphi^+(t)=a(t)\varphi^-(t)+b(t),\qquad t\in C,\qquad (1)$$

в предположении, что C — конечная совокупность разомкнутых дуг, удовлетворяющих условию Ляпунова, $a(t)\neq 0$ и удовлетворяет условию Гёльдера, $b(t)$ — почти всюду ограниченная функция, а искомая аналитическая функция $\varphi(z)$ представима интегралом типа Коши с плотностью, принадлежащей классу Лебега L_p, $p>1$. Доказывается, что если $b(t)$ удовлетворяет условию Гёльдера, то всякое решение задачи (1), представимое интегралом типа Коши, есть кусочно-голоморфная функция. Н. П. Векуа

3774. Обобщение теоремы Иенсена о нулях производной полинома. Уолш (A generalization of Jensen's theorem on the zeros of the derivative of a polynomial. Walsh J. L.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 2, 91—93 (англ.)

Дается обобщение известной теоремы Иенсена (Пойа, Сегё, Задачи и теоремы из анализа, ч. 1, 116, задача 35) о расположении комплексных нулей производной полинома с действительными коэффициентами. Т. И. Краснощекова

3775. О степени устойчивости квазиполиномов. Бархин Г. С., Уч. зап. Ростовск. н/Д. ун-та, 1955, **32**, № 4, 95—97

Рассмотрена задача об определении условий, при которых все нули квазиполинома

$$f(z)=\varphi(z)\operatorname{ch} z+\psi(z)\operatorname{sh} z,$$

где $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ — вещественные полиномы относительно z, имеют отрицательные действительные части меньшие α (величина $\alpha>0$ в технической литературе называется «степенью устойчивости»). Приведен пример. Новых результатов работа не содержит. Описываемый метод решения задачи (подстановка $z=w-\alpha$ в $f(z)$ и применение к $f(w-\alpha)$ критерия устойчивости) применялся для квазиполиномов в работах референта (Автоматика и телемеханика, 1947, № 3, 1948, № 3). Оценка величины α приводилась в работе Е. А. Есиповича (Прикл. матем. и механика, 1951, № 5). Я. З. Цыпкин

3776. О росте функции среднего типа. Фукс (On the growth of functions of mean type. Fuchs W. H. J.), Proc. Edinburgh Math. Soc., 1954, **9**, № 2, 53—70 (англ.)

Пусть функция $f(z)$, регулярная в полуплоскости $\operatorname{Re} z\geqslant 0$, удовлетворяет неравенствам

$$|f(z)|<Me^{B|z|},\quad |f(iy)|<Me^{\pi L|y|},\qquad (1)$$

в которых M, B и L — положительные числа, и $\{\lambda_n\}$ — последовательность таких положительных чисел, что $\operatorname{Inf}_n(\lambda_{n+1}-\lambda_n)>0$. Решается вопрос об условиях, которым должна удовлетворять последовательность $\{\lambda_n\}$ для того, чтобы имело место равенство

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}\lambda_n^{-1}\ln|f(\lambda_n)|=\overline{\lim}_{x\to\infty}x^{-1}\ln|f(x)|.\qquad (2)$$

Постановка вопроса и первый результат принадлежат В. Бернштейну. Критерий дается с помощью функции $\varphi(r)=\sum_{\lambda_n<r}\lambda_n^{-1}-L\ln r$. Доказана теорема: Для того чтобы имело место равенство (2), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия $\lim_{r\to\infty}\Phi(r)=\infty$; каждому $\varepsilon>0$ отвечает $K(\varepsilon)>0$ так, что при $y>x>K(\varepsilon)$ $\varphi(y)-\varphi(x)>-\varepsilon$.

Поскольку дано необходимое и достаточное условие, этот результат можно считать полным решением вопроса. Он включает более ранние результаты В. Бернштейна и Н. Левинсона. Б. Я. Левин

3777. Подход к эллиптическим функциям, как к абелевым. Розати М. (Uno sguardo alle funzioni ellittiche come introduzione alle funzioni abeliane. Rosati Mario), Archimede, 1955, **7**, № 2, 49—55 (итал.)

Дается беглое изложение основных свойств эллиптических функций, как обращения эллиптического интеграла общего вида. Г. П. Боев

3778. Замечание к моей прошлой статье «Теория фуксовых групп». Цудзи (A remark on my former paper «Theory of Fuchsian groups». Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1955, **7**, № 2, 202—207 (англ.)

Обозначения см. РЖМат, 1954, 2929. Если показать, что

$$m(r, a)=O(1),\qquad (1)$$

то из результатов автора (Japan. J. Math., 1951, 21, 1—27) сразу следует соотношение $N(r, a)=T(r)+O(1)$. $a\in D_0(\rho)$, где $O(1)$ равномерно ограничено для

$a \in D_0(\rho)$, $1/2 \leqslant r < 1$. В реферируемой статье это соотношение доказывается независимо (при этом доказывается неравенство (6), эквивалентное (1)) и из него получен ряд формул цитируемой выше статьи. Автор отмечает, что в последней доказательство теоремы 8 ошибочно.

Примечание референта. Неравенства (1) и (6) являются непосредственными следствиями теоремы Тайхмюллера—Сельберга (Selberg H., Comment. math. helv., 1945/46, 18, 309—326). А. А. Гольдберг

3779. О проблеме типа римановых поверхностей. Радойчич (О проблему риманових повърши. Радојчић М.), Зб. радова Српска АН, 1953, 35, № 3, 15—28 (серб., рез. франц.)

Работа представляет не претендующий на полноту обзор по проблеме типа односвязной римановой поверхности, рассматриваемой как многолистное наложение комплексной z-плоскости. Помимо известных критериев, изложенных в монографии Неванлинна Р. «Однозначные аналитические функции» (1941, перевод с нем.), приводятся некоторые критерии, принадлежащие автору, в том числе усиление критерия Альфорса для поверхностей, имеющих над конечной частью плоскости только алгебраические точки ветвления (Radojčić M., Publ. Math. de l'Univ. Belgrade, 1937, 6; 1948, 2; 1950, 3). Л. И. Волковыский

3780. Теоремы типа теоремы Фрагмена — Линделёфа на открытой римановой поверхности. Курода (Theorems of the Phragmén—Lindelöf type on an open Riemann surface. Kuroda Tadashi), Osaka Math. J., 1954, 6, № 2, 231—241 (англ.)

Пусть F — открытая риманова поверхность и $\{F_n\}$ — исчерпание F такое, что граница поверхности F_n Γ_n состоит из конечного числа замкнутых аналитических кривых, каждый компонент $F \setminus F_n$ некомпактный и $(F_n \cup \Gamma_n) \subset F_{n+1}$. Пусть $u_n(p)$ — гармоническая функция в $F_n \setminus F_{n-1} (n \geqslant 1)$, $u_n = 0$ на Γ_{n-1} и $u_n = \ln \sigma_n$ на Γ_n, где σ_n выбрано так, что для функции $v_n(p)$, сопряженной с $u_n(p)$, $\int_{\Gamma_{n-1}} dv_n = 2\pi$; $u_n(p) + iv_n(p)$ отображает конформно $F_n \setminus F_{n-1}$ с конечным числом соответственно подобранных разрезов на $0 \leqslant u_n < \ln \sigma_n$, $0 < v_n < 2\pi$ с горизонтальными разрезами. Пусть функция $u(p) + iv(p) = u_n(p) + iv_n(p) + \ln(\sigma_1 \sigma_2 \ldots \ldots \sigma_{n-1})$, если $p \in F_n \setminus F_{n-1} (n \geqslant 1)$; $u(p) + iv(p)$ отображает $F \setminus F_0$ кусочно-конформно на полосу $0 \leqslant u < R = \ln(\sigma_1 \sigma_2 \ldots)$, $R \leqslant \infty$, с горизонтальными разрезами. Пусть G — некомпактная область на F, относительная граница которой C состоит из не более чем счетного множества аналитических кривых без предельных точек на F. Обозначим γ_r линию уровня $u(p) = r (0 < r < R)$ на F,

$$\theta_r = \gamma_r \cap G, \quad \int_{\theta_r} dv = \theta(r), \quad I(r) = \int_{r_0}^{r} \theta^{-1}(r)\, dr.$$

Основные результаты статьи:

Теорема 1. Область $G \subset F$ можно рассматривать как подобласть некоторой римановой поверхности с нулевой границей тогда и только тогда, когда $I(R) = \infty$.

Теоремы 2—3. Пусть $f(p)$ регулярна в G и непрерывна в $G \cup C$, $|f(p)|$ однозначен в $G \cup C$ и $|f(p)| \leqslant 1$ на C. Если имеется $p_0 \in G$, где $|f(p_0)| > 1$, то

$$\underline{\lim}_{r \to R} (\ln M(r))^2 / I(r) > 0, \quad M(r) = \max_{p \in \theta_r} |f(p)|,$$

и, следовательно,

$$\underline{\lim}_{r \to R} \ln M(r) / \sqrt{r} > 0. \qquad (1)$$

Теорема 5 (в ослабленной формулировке). Пусть $w = f(p)$ отображает F на риманову поверхность Φ. Если $\int_0^R \exp[2\pi l(r)]\, dr = \infty$, то Φ обладает свойством Иверсена (достижимость граничных точек).

Референту осталось неясным утверждение автора, что неравенство (1) включает результат Кусуноки (РЖМат, 1956, 1287). А. А. Гольдберг

3781. Случайные блуждания и проблема типа римановой поверхности. Какутани (Random walk and the type problem of Riemann surfaces. Kakutani Shizuo), Contributions to the theory of Rieman surfaces, Princeton, N. J., 1953, 95—101 (англ.)

Рассматриваются n-мерные римановы поверхности Σ^n, являющиеся накрывающей поверхностью n-мерного декартова пространства R^n. Утверждается, что основной результат статьи верен и для произвольных абстрактных n-мерных римановых поверхностей. Определяются понятия брауновского движения на n-мерной римановой поверхности Σ^n: траектории $\zeta(\zeta_0, t, \omega)$ брауновского движения на Σ^n, начинающегося в точке ζ_0 (здесь ω — элемент «пространства элементарных событий», связанного с брауновским движением), максимальной продолжительности $\sigma(\zeta_0, \omega, \Sigma^n)$ брауновского движения по траектории $\zeta(\zeta_0, t, \omega)$ ($\sigma(\zeta_0, \omega, \Sigma^n)$ — положительное вещественное число или бесконечность) и вероятности $u(\zeta_0, F, \Sigma^n)$ того, что брауновское движение на Σ^n, начинающееся в точке ζ_0, пересечет компактное множество F пространства Σ^n. После этого формулируется следующая основная теорема:

Пусть Σ^n риманова поверхность над R^n. Тогда имеет место одна из следующих двух возможностей: или 1) $u(\zeta_0, F, \Sigma) = 1$ для всех $\zeta_0 \in \Sigma^n - F$ и всех множеств F, $(n-2)$-мерная емкость (при $n \neq 2$ под этим понимается логарифмическая емкость) которых положительна (в частности, для всех F, имеющих внутреннюю точку), и $u(\zeta_0, F, \Sigma) = 0$ для всех $\zeta_0 \in \Sigma^n - F$ и множеств F $(n-2)$-мерная емкость которых равна нулю. В этом случае $\sigma(\zeta_0, \omega, \Sigma^n) = \infty$ для всех ζ_0 и почти всех ω и для всех ζ_0 и почти всех ω траектория $\zeta(\zeta_0, t, \omega)$ брауновского движения всюду плотна в Σ^n и возвращается в любую окрестность любой точки $\zeta \in \Sigma^n$ бесконечно много раз для достаточно больших значений t; или 2) $u(\zeta_0, F, \Sigma^n) < 1$, если $\Sigma^n - F$ содержит единственную неограниченную (т. е. не содержащуюся ни в каком компактном множестве) компоненту, причем в этом случае $u(\zeta_0, F, \Sigma^n) \to 0$ при ζ_0, стремящемся к «границе» Σ^n (т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует компактное множество F' в Σ^n такое, что $u(\zeta_0, F, \Sigma^n) < \varepsilon$ при $\zeta_0 \in \Sigma^n - F'$). В рассматриваемом случае $u(\zeta_0, F, \Sigma^n) = 0$ для некоторого $\zeta_0 \in \Sigma^n - F$ (и даже для всех $\zeta_0 \in \Sigma^n - F$) тогда и только тогда, когда $(n-2)$-мерная емкость F равна нулю, и для любого $\zeta_0 \in \Sigma^n$ и почти всех ω траектория $\zeta(\zeta_0, t, \omega)$ нигде не плотна в Σ^n и стремится к «границе Σ^n» при t, стремящемся к $\sigma(\zeta_0, \omega, \Sigma^n)$ (т. е. для любого компактного множества F в Σ^n и любого $\zeta_0 \in \Sigma^n$ существует $t_0 = t_0(\zeta_0, \omega, F, \Sigma^n)$ такое, что $\zeta(\zeta_0, t, \omega) \in \Sigma^n - F$ при $t_0 < t < \sigma(\zeta_0, \omega, \Sigma^n)$.

Доказательство этой теоремы не приводится; указывается только, что оно следует из некоторых фактов теории брауновского движения в R^n, содержащихся в обзоре Дворецкого и Эрдеша (Dvoretzky A., Erdös P., Proc. 2nd Berkeley Sympos. math. stat. and probab., 1951, 353—367) и в предыдущих работах автора (Proc. Acad. Japan., 1944, **20**, 648—652; 708—714; 1945, **21**, 138—140, 227—233). А. М. Яглом

3782. Итерация некоторого конечного преобразования. Урабе (Iteration of certain finite transformation. Urabe Minoru), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **16A**, № 3, 471—486; **17**, № 1, 43—65 (англ.)

Рассматривается итерация преобразования T:

$$y_\nu = \sum_\mu a^\nu_\mu x_\mu + \sum_{\mu_1,\mu_2} a^\nu_{\mu_1,\mu_2} x_{\mu_1} x_{\mu_2} + \dots \quad (\nu = 1, 2, \dots, n) \qquad (1)$$

в пространстве E_{2n} комплексных чисел $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Предполагается, что модули всех собственных значений матрицы $\| a^\nu_\mu \|$ равны единице. Преобразование (1) приводится сначала к виду, при котором матрица $\| a^\nu_\mu \|$ имеет нормальную жорданову форму:

$$y_\nu = x_\nu + \delta_{\nu-1} x_{\nu-1} + \sum_{\mu_1\mu_2} a^\nu_{\mu_1\mu_2} x_{\mu_1} x_{\mu_2} + \dots, \qquad (2)$$

где $\delta_{\nu-1} = 0$ или 1. Различаются следующие типы преобразований T:

тип A $\begin{cases} A_1\text{: все } \delta_{\nu-1} \text{ равны 0, не все } a^\nu_{\mu_1\mu_2} \text{ равны 0,} \\ A_2\text{: не все } \delta_{\nu-1} \text{ равны 0,} \end{cases}$

тип B: все $\delta_{\nu-1}$ равны 0, все $a^\nu_{\mu_1\mu_2}$ равны 0.

Для преобразования типа A_1 устанавливаются достаточные, а также необходимые условия существования области притяжения, прилегающей к точке 0 (0, 0,...,0), имеющей форму сферы или цилиндроида, образованного кругами, лежащими в плоскостях $x_1, x_2, \dots, x_n$. Например, для существования области притяжения вида цилиндроида необходимо, чтобы преобразование T имело вид:

$$y_\nu = x_\nu + x^2_\nu [a_\nu + \sum_\lambda a^\nu_\lambda x_\lambda + \sum_{\lambda_1,\lambda_2} a^\nu_{\lambda_1\lambda_2} x_{\lambda_1} x_{\lambda_2} + \dots]. \qquad (3)$$

Для существования области притяжения данного вида достаточно, чтобы $a_\nu \neq 0$ для всех ν. Доказывается, что для любого преобразования типа A_2 областей притяжения указанных видов не существует.

В случае преобразования типа B устанавливается достаточное условие существования сферической области притяжения, а также областей притяжения, ограниченных алгебраическими поверхностями более высокого порядка.

В главе III полученные результаты прилагаются к исследованию интегралов системы

$$\frac{dx_1}{\xi_1} = \frac{dx_2}{\xi_2} = \dots = \frac{dx_n}{\xi_n},$$

где $\xi_\nu = \Sigma_\lambda c^\nu_\lambda x_\lambda + \Sigma_{\lambda,\mu} c^\nu_{\lambda\mu} x_\lambda x_\mu + \dots$, в предположении, что собственные значения матрицы $\| c^\nu_\lambda \|$ лежат на прямой, проходящей через начало, по обе стороны от начала. Устанавливается качественная картина поведения интегральных кривых в окрестности начала в зависимости от итерационных свойств некоторого преобразования типа (1). С. П. Пулькин

3783. Дискретные группы в симметрических пространствах. I. Клинген (Diskontinuierliche Gruppen in symmetrischen Räumen. I. Klingen Helmut von), Math. Ann., 1955, **129**, № 4, 345—369

Рассматриваются следующие типы симметрических областей:

1) $\mathfrak{H}_1 : \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) > 0,$

2) $\mathfrak{H}_2 : \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) > 0,\ Z'Z = -E,$

3) $\mathfrak{H}_3 : \frac{1}{2i}(Z - \bar{Z}) > 0,\ Z' = Z,$ где $\bar{Z} = \overline{Z'}$.

Для них указываются полные группы аналитических автоморфизмов. Для описания этих групп введем обозначения: $I = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$, E_n — единичная матрица порядка n; Ω_1 — группа всех комплексных матриц M порядка $2n$, для которых $\bar{M} I M = I$, $\bar{M} = \bar{M}'$; Ω_2 — подгруппа ортогональных матриц из Ω_1; Ω_3 — подгруппа вещественных матриц из Ω_1;

$$\Phi_\nu = \begin{pmatrix} iE & iE \\ -E & E \end{pmatrix}^{-1} \Omega_\nu \begin{pmatrix} iE & iE \\ -E & E \end{pmatrix}, \quad \nu = 1, 2, 3.$$

С помощью отображения $Z_0 = (Z - iE)(Z + iE)^{-1}$ области $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3$ переходят в области следующих трех типов:

1) $K_1 : E - Z_0 \bar{Z}_0 > 0,$

2) $K_2 : E - Z_0 \bar{Z}_0 > 0,\ Z_0' = -Z_0,$

3) $K_3 : E - Z_0 \bar{Z}_0 > 0,\ Z_0' = Z_0.$

Каждой матрице $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \Phi_\nu$ соответствует аналитическое отображение K_ν на себя $Z \to F(Z) = (AZ + B)(CZ + D)^{-1}$. Совокупность этих отображений образует группу, обозначенную автором Φ^ν. Φ^ν—очевидно, фактор-группа Φ_ν.

Автор показывает, что полная группа аналитических автоморфизмов K_1 состоит из преобразований $F(Z)$ и $F(Z')$, $F \in \Phi^1$; полная группа аналитических автоморфизмов K_2 состоит из преобразований: $F(Z)$, $F \in \Phi^2$ при $n > 4$ и четном (случай нечетных n в статье не рассматривается),

$F(Z)$ и $F(Z^*)$, $F \in \Phi^2$

$Z^* = \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ -Z_{12} & Z_{22} \end{pmatrix}$, Z_{11}, Z_{22}, Z_{12} — матрицы второго порядка $\Big\}\ n = 4;$

полная группа аналитических автоморфизмов K_3 состоит из преобразований $F(Z)$, $F \in \Phi^3$.

Третий параграф реферируемой работы посвящен геометрии областей $\mathfrak{H}_\nu$. Вначале исследуются геометрические свойства $\mathfrak{H}_1$, из которых выводятся геометрические свойства $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_3$ при помощи вложения $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_3$ в $\mathfrak{H}_1$. Пусть Z и $Z_1 \in \mathfrak{H}_1$. Двойным отношением Z и Z_1 автор называет матрицу

$$R(Z, Z_1) = (Z - Z_1)(Z - \bar{Z}_1)^{-1}(\bar{Z} - \bar{Z}_1)(\bar{Z} - Z_1)^{-1}.$$

Он показывает, что характеристический полином матрицы $R(Z, Z_1)$ является инвариантом при аналитических отображениях $\mathfrak{H}_1$ в себя. Далее вводится инвариантная риманова метрика

$$ds^2 = \sigma(Y^{-1} dZ\, Y^{-1} d\bar{Z}),\ Y = (Z - \bar{Z})/2i$$

($\sigma(A)$ — след матрицы A)

Доказывается, что для любой пары точек существует, и притом только одна, геодезическая линия. Расстояние

между Z и Z_1 по геодезической равно

$$\sqrt{\sigma\cdot\ln^2[(E+R^{1/2})/(E-R^{1/2})]},\ \text{где } R=R(Z,Z_1),$$

а $\ln^2[(E+R^{1/2})/(E-R^{1/2})]=4R\,(\Sigma_{k=0}^{\infty}R^k/(2k+1))^2$.

Аналогичные результаты получены для $\mathfrak{H}_2$ и $\mathfrak{H}_3$. Отметим, что для $\mathfrak{H}_3$ эти результаты были впервые получены Зигелем (Siegel C., Amer. J. Math., 1943, 65, 1—86). Метод, применяемый автором, является развитием метода Зигеля. Последний параграф содержит доказательство общих теорем о дискретных группах в областях $\mathfrak{H}_\nu$, $\nu=1,2,3$, установленых Зигелем для $\mathfrak{H}_3$.

И. И. Пятецкий-Шапиро

3784. Интегральное представление аналитических функций двух комплексных переменных. Темляков А. А. Уч. зап. Моск. обл. пед. ин-та, 1954, 21, 7—22

Обобщается ранее полученное автором интегральное представление функций, регулярных в гиперконусе (Темляков А. А., Изв. АН СССР, сер. матем., 1952, 16, 525—536), на случай так называемой (p,q)-двоякокруговой области, ограниченной конечным числом неаналитических поверхностей. Основной результат формулируется во второй теореме:

Если функция $F(w,z)$ регулярна в (p,q)-двоякокруговой области $\overline{D}$, то для точки (w,z), лежащей в D, имеет место представление:

$$F(w,z)=\frac{1}{4\pi\cdot i}\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 d\tau\int_C\frac{\zeta F[r_1(\tau)\zeta^p,\,r_2(\tau)\zeta^q]}{(\zeta-u)^2}\,d\zeta,\quad(1)$$

где C — окружность $|\zeta|=1$, описываемая переменным $u=\tau(w/r_1(\tau))^{1/p}+(1-\tau)(z/r_2(\tau))^{1/q}e^{it}$, когда точка (w,z) описывает границу области D: $w=r_1(\tau)\varsigma^p$, $z=r_2(\tau)\eta^q$; $\eta=e^{-it}\zeta$; $r_1(\tau)=\tau^p f(\tau)$, $r_2(\tau)=(1-\tau)^q\varphi(\tau)$, где $f(\tau)$ и $\varphi(\tau)$ — действительные, положительные, непрерывные в интервале $(0,1)$ функции, удовлетворяющие некоторым условиям.

Как следствие интегрального представления (1) автор получает формулу, определяющую регулярную функцию $F(w,z)$ в области D, если известно значение $\operatorname{Re}F(w,z)$ на границе области и значение $\operatorname{Im}F(w,z)$ в начале координат. В частности, значения бигармонической функции в каждой точке области определяется через ее значения на границе следующей формулой:

$$\operatorname{Re}F(w,z)=$$
$$=\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}dt\int_0^1 d\tau\int_0^{2\pi}\operatorname{Re}\frac{\zeta^2+2u\zeta-u^2}{(\zeta-u)^2}\operatorname{Re}F[r_1(\tau)\zeta^p,r_2(\tau)\zeta^q]\,dQ,$$

где $\zeta=e^{iQ}$.

В заключение автор приводит неравенства для коэффициентов двойного степенного ряда, аналогичные неравенствам Коши для коэффициентов степенного ряда, в зависимости от области. Этот результат сформулирован в четвертой теореме:

Если ряд $F(w,z)=\Sigma_{m,n}a_{mn}w^mz^n$ сходится в двоякокруговой области D, ограниченной гиперповерхностью

$$|w|=r_1(\tau),\quad |z|=r_2(\tau),\quad 0\leqslant\tau\leqslant 1,$$

то имеют место неравенства

$$|a_{mn}|\leqslant\frac{(m+n+1)!}{m!n!}\,\frac{M}{r^{m+n}}\int_0^1\left(\frac{\tau}{r_1(\tau)}\right)^m\left(\frac{1-\tau}{r_2(\tau)}\right)^n d\tau,$$

где $M=\max|F(w,z)|$, $r<1$, $|w|=r\cdot r_1(\tau)$, $|z|=r\cdot r_2(\tau)$.

Здесь автор, очевидно, имеет в виду области, псевдоконформно не отображающиеся друг на друга, и приводит примеры оценок коэффициентов для бицилиндра, гиперконуса и гипершара. А. В. Лебедев

3785. Дифференциальные уравнения в теории эллиптических модулярных функций. Маас (Die Differentialgleichungen in der Theorie der elliptischen Modulfunktionen. Maaß Hans), Math. Ann., 1953, B125, № 3, 235—263 (нем.)

Рассматриваются неаналитические автоморфные формы, связанные с неопределенными квадратичными формами. Через $\{\alpha,\beta\}$ автор обозначает пространство всех комплексных аналитических функций $f(z,w)$, для которых в полуплоскости $w=z$, $\operatorname{Im}z>0$ справедливо дифференциальное уравнение

$$\left[-y^2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)+(\alpha-\beta)iy\,\frac{\partial}{\partial x}-\right.$$
$$\left.-(\alpha+\beta)y\,\frac{\partial}{\partial y}\right]f(x+iy),f(x-iy)=0.$$

Пусть G — некоторая группа вещественных матриц

$$S=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad ad-bc=1.$$

Автоморфной формой типа $\{G;\alpha,\beta,v\}$ называется функция $f(z,w)$ со следующими свойствами:

1) $f(z,w)\in\{\alpha,\beta\}$;

2) Для всех $S\subset G$ $f(Sz,Sw)(cz+d)^{-\alpha}(cw+d)^{-\beta}=$
$=v(S)f(z,w)$, $|v(S)|=1$, $Sz=\dfrac{az+b}{cz+d}$, $Sw=\dfrac{aw+b}{cw+d}$;

3) Если $B(\infty)$ — неподвижная точка некоторой параболической подстановки из G, то

$$f(Bz,Bw)(cz+d)^{-\alpha}(cw+d)^{-\beta}=O(y^k),\ y\to\infty,$$
$$B=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\ B(\infty)=\frac{a}{c},$$

где $k>0$ — некоторая постоянная.

В статье устанавливается, что ряд

$$E(z,w)=\sum\gamma(c,d)(cz+d)^{-\alpha}(cw+d)^{-\beta}$$

является автоморфной формой указанного выше типа. Далее указывается на возможность перенесения на рассматриваемые автоморфные формы исследований Гекке о связи между модулярными формами и рядами Дирихле. С помощью преобразования Меллина можно показать, что существует взаимно однозначное соответствие между модулярными формами $f(z,w)$ типа $\{\alpha,\beta\}$ и парами мероморфных функций $\varphi(s)$ и $\psi(s)$, допускающих представление в некоторой полуплоскости рядами Дирихле

$$\varphi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n/n^s,\ \psi(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{-n}/n^s$$

и обладающих функциональными уравнениями, аналогичными функциональным уравнениям для дзета-функции Римана. И. И. Пятецкий

3786. О производных плюрисубгармонической функции. Лелон (Sur les dérivées d'une fonction plurisousharmonique. Lelong P.), C. r. Acad. sci., 1954, 238, № 24, 2276—2278 (франц.)

Функция $V(z)=V(z_1,\ldots,z_n)$, где $z_k=x_k+iy_k$, $1\leqslant k\leqslant n$, принимающая действительные значения, называется плюрисубгармонической в некоторой области D, если: 1) она суммируема на каждом компакте $K\subset D$; 2) эрмитова форма $\partial[V,\alpha]=\sum_{i,j=1}^n V^{ij^*}\alpha_i\bar{\alpha}_j$ — положительна (здесь $V^{ij^*}=\dfrac{\partial^2V}{\partial z_i\,\partial\bar{z}_j}$ — производные, являющие-

ся в случае необходимости обобщенными функциями, α_k — произвольные комплексные постоянные, причем $\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 = 1$); 3) для любой точки $z_0 \in D$ $V(z_0) = V_m(z_0)$, где $V_m(z_0)$ — максимум функции $V(z)$ в точке z_0 в смысле Бэра.

Тогда величина $\mu_{ij^*}(f) = V^{ij^*}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j\,(f)$ является комплексной мерой Радона, причем $\mu_{kk^*} \geq 0$, $|\mu_{ij^*}| \leqslant |\mu|_D$. Здесь $|\ |_D$ — некоторая надлежащим образом определенная норма, функции f непрерывны, каждая из них равна нулю за пределами некоторого компакта $K_f \subset D$, $|f| \leqslant 1$, $\mu = \Sigma_{ij} V^{ij^*}\, dz_i \wedge d\bar{z}_j$.

Пусть W^p — аналитическое многообразие, комплексной размерности p, $W^p \subset D$. Предполагается, что в некоторой окрестности ω^k любой своей обыкновенной точки многообразие W^p может быть задано с помощью уравнений $f_s^{(k)}(z_1, \ldots, z_n) = 0$ $(1 \leqslant s \leqslant n-p)$, где функции $f_s^{(k)}$ — голоморфны в ω^k и ранг матрицы $\left\| \dfrac{\partial f_s^{(k)}}{\partial z_i} \right\|$ равен $n-p$. Элемент площади многообразия $W^{(p)}$ определяется как положительная мера Радона $d\sigma = (p!)^{-1}\,\theta \wedge \beta_p$, где

$$\beta_p = (i/2)^p \sum_{i_1 < \cdots < i_p} dz_{i_1} \wedge d\bar{z}_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \wedge d\bar{z}_{i_p},$$

$$\theta = (i/\pi)^{n-p}\, d_z d_z^- V_1 \wedge \cdots \wedge d_z d_z^- V_{n-p}.$$

Здесь $V_s = \ln |f_s^{(k)}|$; по терминологии Де Гама, θ является потоком. Тогда, если $\sigma(R)$ — площадь части $W^{(p)}$, заключенная в области $\sum_{k=1}^{n} |z_k - z_k^0|^2 < R$, где точка $(z_1^0, \ldots, z_n^0) \in W^{(p)}$, R^{2p} — объем шара действительной размерности $2p$, радиуса R, то величина $\sigma(R)(R^{2p})^{-1}$ оказывается неубывающей функцией R, имеющей конечный предел при $R \to 0$. Подобный результат для $p = n-1$ был получен автором ранее (РЖМат, 1956, 386). Б. А. Фукс

3787. О комплексных представлениях трипотенциального S_2. Чириллo (Sulle rappresentazioni complesse dell' S_2 tripotenziale. Cirillo E.), Rend. Accad. sci., fis. e mat. Napoli, 1953 (1952), **19**, 194—197 (итал.)

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 5, 462

3788. Граничное искажение конформного отображения. Цудзи (The boundary distortion on conformal mapping. Tsuji Masatsugu), J. Math. Soc. Japan, 1954, **6**, № 3—4, 235—261 (англ.)

Даны упрощенные по сравнению с опубликованными ранее (в основном за счет использования свойств функций Грина) доказательства некоторых известных теорем о граничных свойствах конформного отображения (или доказательства их ближайших обобщений) — главным образом теорем об условиях существования предельных значений производной от функции $w(z) = \xi + i\eta$, отображающей $\operatorname{Im} z > 0$ на область, ограниченную жордановой кривой C, и предельных значений $(w(z) - w_0)/(z - z_0)$, $w_0 = w(z_0)$ при приближении z к z_0, $\operatorname{Im} z_0 = 0$, изнутри $\operatorname{Im} z > 0$ произвольным образом или по некасательным путям.

Основная теорема работы ($w_0 = 0$, $z_0 = 0$):

1) Пусть вблизи $w = 0$ C лежит между кривыми:

$$H: \eta = h(\xi),\ \bar{H}: \eta = -h(\xi),\ -\delta \leqslant \xi \leqslant \delta,\ h(-\xi) = h(\xi),\ h(0) = 0,$$

где $h(t) > 0$ — непрерывная возрастающая при $t > 0$ функция, для которой $\int_0^{\delta} t^{-2} h(t)\, dt < \infty$. Тогда $\lim w(z)/z = \lim w'(z) = \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, равномерно существует при $z \to 0$ из $\operatorname{Im} z > 0$ внутри угла $|\arg z/i| < (\pi/2 - \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0$ произвольно). 2) Пусть C лежит между H и $\bar{H}$ и удовлетворяет условию: $\lim_{r \to 0} r_1(r)/r = 1$, $\lim_{r \to 0} r_2(r)/r = 1$, где $r_1(r)$ и $r_2(r)$ — минимум и соответственно максимум $|w|$ на дугах C, соединяющих точки $w \in C$, $|w| = r$ (или некоторому вполне аналогичному условию). Тогда $\lim w(z)/z = \gamma$, $0 < \gamma < \infty$, существует при $z \to 0$ изнутри $\operatorname{Im} z > 0$ (Каратеодори К., Конформное отображение, ОНТИ, 1934, 115; Resonoff P., Lavrentieff M., Bull. Soc. math. France, 1930, 58, 175—198; Warschawski S., Math. Z., 1932, B35, № 3—4, 321—456).

Показано, что в определенном смысле условие $\int_0^{\delta} t^{-2} h(t)\, dt$ существенно. П. П. Куфарев

3789. О кривизне линий уровня и их ортогональных траекторий при конформных отображениях. Корицкий Г. В., Матем. сб., 1955, **37**, № 1, 103—116

Работа, по замечанию автора, посвящена продолжению и дополнению результатов И. Е. Базилевича и В. А. Зморовича (Зморович В. А., Укр. матем. ж., 1952, 4, № 3, 276—298) по изучению экстремумов кривизны линий уровня при конформных однолистных отображениях круга $|z| < 1$ и круговой области $|z| > 1$ функциями некоторых специальных классов (звездных, выпуклых, p-кратно симметрических звездных и выпуклых). Пользуясь методом И. Е. Базилевича, автор доказывает следующие теоремы, в которых $\underline{K}_r$ и $\bar{K}_r$ обозначают соответственно точную нижнюю и точную верхнюю границы кривизны образа окружности $|z| = r$, а K_{φ_0} — кривизну образа радиуса $\arg z = \varphi_0$ или его продолжения (при $r > 1$).

Теорема 1. Если назвать функцией класса (A) регулярную в круге $|z| < 1$ функцию $F_p(z)$, определяемую формулой

$$F_p(z) = \int_0^z \prod_{m=1}^{n} (1 - k_m^p z^p)^{-\mu_m} dz,$$

где p — целое $\geqslant 2$, $k_m = e^{i\theta_m}$, θ_m — произвольные действительные числа $(m = 1, 2, \ldots, n)$, а μ_m $(m = 1, 2, \ldots, n)$ — действительные числа, связанные соотношениями

$$\sum_1^n \mu_m = 2/p,\quad -1 \leqslant \sum_{m=j}^{l} \mu_m \leqslant 1 + 2/p \ (j, l = 1, 2, \ldots, n).$$

то для функций класса (A) имеем:

$$\underline{K}_r = \frac{1}{r}\,\varphi(r^p), \qquad \bar{K}_r = \begin{cases} \varphi_0(r), & r_0 \leqslant r < 1, \\ \varphi_1(r), & r_1 \leqslant r \leqslant r_0, \\ \varphi(-r^p), & 0 < r \leqslant r_1, \end{cases}$$

где

$$0 < r < 1,\ \varphi(r) = [1 - 2(p+1)r + r^2](1+r)^{2/p}/(1-r)^2$$

$$\varphi_0(r) = 2^{3/2} p r^{3(p-1)/2} (1+r^p)^{(2/p)-1-2\alpha}/(1-r^p)^{2-2\alpha} [\lambda(r^p)]^{1-2/p},$$

$$\lambda(r) = \ln[(1+r)/(1-r)],$$

$$\varphi_1(r) = 3^{-3/2} p^{-1/2} (2+p)^{3/2} (1+r^p)/r\,(1-r^p)^{1-2/p},$$

$$\alpha \equiv \alpha(r) = \frac{3}{4}\lambda^{-1}(r^p) - \frac{2+p}{8p}\, r^{-p}\,(1-r^p)^2,$$

$$\alpha(r_0) = 1/2 + 1/p,\ r_1 = [(2p + 1 - \sqrt{3p^2 + 6p})/(p-1)]^{1/p}.$$

Теорема 2. Пусть имеем класс $\sum_p^0 (p=2,\ 3,\ldots)$ функций

$$\Phi_p(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} b_{pn-1}/z^{pn-1},\quad z = re^{i\varphi},\quad r>1,$$

регулярных в области $|z|>1$ всюду, кроме простого полюса $z=\infty$, и отображающих эту область на области с выпуклым дополнением и с p-кратной симметрией вращения. В таком случае для кривизны линий уровня имеем

$$\underline{K}_r = r(r^p-1)/(r^p+1)^{1+2/p},$$
$$\overline{K}_r = r(r^p+1)/(r^p-1)^{1+2/p}.$$

Теорема 3. Пусть имеем класс $S_p^0 (p=1,\ 2,\ldots)$ функций

$$f_p(z) = z + \sum_{n=1}^{\infty} a_{np+1} z^{np+1},$$

регулярных и однолистных в круге $|\alpha|<1$ и отображающих его на выпуклые области. В таком случае существует следующая точная оценка:

$$0 \leqslant |K_{\varphi_0}| \leqslant 2r^{p-1}\sin\psi_0/(1-2r^p\cos\psi_0+r^{2p})^{1-1/p},\quad r<1,$$

где

$$\psi_0 = \arccos\left[(1-\sqrt{1-(p-1)\,\omega_p^2(r^p)})/\omega_p(r^p)\right],$$
$$\omega_p(r) = 4r/p(1+r^2),$$

Теорема 4. В классе функций $\sum_p^0 (p=2,\ 3,\ldots)$ имеем:

$$0 \leqslant |K_{\varphi_0}| \leqslant 2r^{p+1}\sin\psi_0/(1+r^{2p}-2r^p\cos\psi_0)^{1+1/p},\quad r>1,$$

где

$$\psi_0 = \arccos\left(\frac{\sqrt{1+(p+1)\,\omega_p^2(r^p)}-1}{\omega_p(r^p)}\right),$$
$$\omega_p(r) = \frac{4r}{p(1+r^2)}.$$

Так как звездными функциями, содержащимися в классе (A), можно аппроксимировать любую звездную p-кратную симметричную в круге функцию $f(z)$, $f(0)=0$, $f'(0)=1$, то полученные в теореме 1 оценки отчасти справедливы и для класса звездных p-кратно симметричных функций, а именно постольку, поскольку они реализуются звездными функциями класса (A). Такими оказываются оценка снизу и третья из оценок сверху (при $0<r\leqslant r_1$).

Если подчинить числа μ_m при доказательстве теоремы 1 более ограничительному условию $\mu_m>0$, то таким же методом, как указывает автор, может быть доказана теорема 4 цитированной работы В. А. Зморовича.

Случай класса (A) при $p=1$, рассмотренный И. Е. Базилевичем, не является частным случаем теоремы 1 автора, так же как и случай класса функций $\sum_1^0$, рассмотренный В. А. Зморовичем, не является частным случаем теоремы 2 автора. Следует отметить, что в работе не рассматриваются вопросы единственности экстремальных отображающих функций.

В. А. Зморович

3790. О равномерных приближениях многочленами с целыми рациональными коэффициентами. Гельфонд А. О., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 199—200

Приводится краткое резюме доклада о результатах, опубликованных в статье автора (РЖМат, 1956, 2925).

3791. Семейства кривых F^*, являющихся локально линиями уровня псевдогармонической функции. Дженкинс, Морс (Curve families F^* locally the level curves of a pseudoharmonic function. Jenkins James Morse Marston), Acta math., 1954, 91, № 1—2, 1—42 (англ.)

Пусть Σ — двумерная сфера, N и S — два диаметрально противоположных ее полюса, ω — замкнутое дискретное множество точек на $\Sigma^* = \Sigma - N - S$ и $G = \Sigma^* - \omega$. Изучается топологическая структура семейства кривых F в G, состоящего из простых открытых дуг или топологических окружностей со свойствами: 1) каждая точка $p \in G$ принадлежит одному и только одному элементу $\alpha_p \in F$; 2) каждой точке $p \in \Sigma^*$ соответствует F-окрестность X_p, $\overline{X}_p \subset G \cup p$ и топологическое отображение $\overline{X}_p$ на $\overline{D}$ (D — круг $|w|<1$), $p \to w=0$, такое, что максимальная открытая дуга из F в X_p переходит в максимальную открытую дугу линии уровня функции $\operatorname{Re} w^n$ в D, причем $n=1$ для $p \in G$ и $n>1$ для точек $p \in \omega$, называемых особыми точками F (для них $w=0$ исключается) (о псевдогармонических функциях и их линиях уровня см. Морс М., Топологические методы теории функций комплексного переменного, 1951). Рассматривается также семейство кривых F^* в Σ^*, представляющее известное продолжение F и состоящее из простых открытых дуг или топологических окружностей, причем, если $h \in F^*$ и точка $p \in h$, $p \overline{\in} \omega$, то α_p принадлежит h вместе со своим концом (или концами) в Σ^*. Элемент из F^*, являющийся также элементом F, называется неособым.

В связи с F^* авторы вводят ряд канонических областей, позволяющих выявить всевозможные характерные разбиения Σ^* на области. Кроме того, авторы вводят индексы $\nu(F)$ и $\mu(F)$ (реф. 3792), которые вместе с разбиением Σ^* имеют важное значение для существования на Σ^* однозначной PH-функции (или многозначных PH-функций с заданными мультипликативно-аддитивными свойствами) с F-кривыми в качестве линий уровня, а также существования сопряженных к ним PC-функций (для односвязной открытой поверхности всегда существуют однозначные PH-функции, соответствующие F, и сопряженные к ним PC-функции (РЖМат, 1955, 188 и 3734). Приведем несколько определений и одно утверждение.

Открытая дуга $\in F^*$ с концевыми точками N и S называется F^*-меридианом. Направленная открытая дуга $\in F^*$ с концевыми точками $N(S)$ называется N-петлей (S-петлей). Область на Σ^*, в которой неособые F-меридианы расположены всюду плотно, называются меридиональными. Область на Σ^*, ограниченная N-петлей и не содержащая S, называется внутренностью N-петли. Область на Σ^*, представляющая объединение максимальной монотонно возрастающей последовательности внутренностей N-петель, называется N-примитивной. Аналогично определяются внутренность S-петли и S-примитивные области.

В классификации F существенно, имеется ли F-меридиан или нет. В работе исследуются оба случая. Для случая, когда F-меридиан существует, доказывается, в частности, что Σ^* состоит из замыкания в нем конечного числа меридиональных областей и не более счетного множества примитивных областей, расположенных все вне друг друга.

Л. И. Волковыский

3792. Сопряженные сети, конформная структура и внутренние преобразования на открытых римановых поверхностях. Дженкинс, Морс (Conjugate nets, conformal structure, and interior transformations

on open Riemann Surfaces. Jenkins James, Morse Marston), Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 1953, **39**, № 12, 1261—1268 (англ.)

На открытой ориентируемой поверхности Q рассматриваются семейства кривых F, G, ... с замкнутым дискретным множеством особых точек ω, удовлетворяющих тем же условиям, что в предыдущем реферате. Пара $[F, G]$ называется сопряженной сетью на Q, если для достаточно малой окрестности H каждой точки $q \in Q$ она совпадает с линиями уровня функций $\mathrm{Re}\, f_H(p)$, $\mathrm{Im}\, f_H(p)$ $(p \in H)$ некоторого внутреннего отображения $w = f_H(p)$ окрестности H на w-плоскость. Если Q обладает конформной структурой и f_H аналитична, то $[F, G]$ называется изотермической сетью. Если сопряженная сеть $[F, G]$ на Q становится изотермической для некоторой конформной структуры Q, то она называется изотермично-реализуемой. Если $[F, G]$ соответствует внутреннему отображению $w = f(p)$ $(p \in Q)$ всей поверхности Q на w-плоскость, то $[F, G]$ называется «принадлежащей» f (contoured by f). Если Q топологически эквивалентна всей конечной z-плоскости, то $[F, G]$ всегда принадлежит однозначному внутреннему отображению f (РЖМат, 1955, 188). В общем случае это, вообще говоря, не так. Пусть M — универсальная поверхность наложения Q, Γ — ее группа преобразований наложения и A — класс внутренних отображений $w = \lambda(p)$ поверхности M на w-плоскость таких, что

$$\lambda g(p) = a_g \lambda(p) + b_g + i b'_g \quad (g \in \Gamma;\ p \in M,\ a_g \neq 0),$$

Тогда для изотермической реализуемости сопряженной пары $[F, G]$ необходимо и достаточно, чтобы она принадлежала внутреннему отображению $\lambda \in A$. Для случая, когда Q есть Σ^* (реф. 3791), исследуется, когда сопряженная пара $[F, G]$ принадлежит внутреннему отображению $\lambda \in A$, выясняется связь между (a_g, b_g, b'_g) и топологическими свойствами $[F, G]$, а также исследуется принадлежность $[F, G]$ внутреннему отображению f поверхности Σ^* на w-плоскость. При этом существенно используются введенные авторами индекс $\nu(F)$, связанный с примитивными областями на Σ^*, индекс $\mu(F)$, численно характеризующий наличие меридиональных областей на Σ^*, и следующее ограничение на рассматриваемые семейства кривых F: пусть F_M — семейство кривых на M, проектирующееся в F; оно всегда принадлежит PH-функции u на M; требуется, чтобы существовала такая функция u, что

$$u(p^{(1)}) = a u(p) + b \qquad (a \neq 0),$$

где $p^{(1)}$ — точка над p на «следующем листе» M и a, b — некоторые действительные числа. Приводится такая теорема: всякая ограниченная (в указанном смысле) сопряженная пара $[F, G]$ изотермически реализуема. При этом $[F, G]$ принадлежит внутреннему отображению Σ^* на комплексную плоскость тогда и только тогда, когда F и G не имеют меридиональных областей на Σ^*, $\nu(F)$ и $\nu(G)$ оба четны, $\mu(F)$ и $\mu(G)$ оба отличны от 1. Результаты приводятся без доказательств. Л. И. Волковыский

3793 К. Принципы, общие методы. Выпуск I. Мийу Анри (Principes, méthodes générales. Fascicule I. Milloux Henri. Avec la collaboration de Charles Pisot. Traité de théorie des fonctions. Tome I. Paris, Gauthier — Villars, 1953, viii+300 pp., 4500 francs) (франц.)

Первая часть первого тома трактата по теории функций комплексного переменного. Заглавие слишком скромно; книга охватывает по меньшей мере весь тот материал, который содержится в большей части учебников по теории функций.— Глава I. Обзор предпосылок из области топологии и теории функций действительного переменного. При этом имеются в виду простейшие понятия теории точечных множеств и знание расширенного курса анализа. Включены интегралы Стилтьеса и Лебега, хотя в настоящем томе они и не используются.— Глава II. Понятие об аналитичности. Гармонические функции. Конформное отображение, исследование отображений, доставляемых некоторыми элементарными функциями; гиперболическая геометрия в связи с линейными преобразованиями единичного круга. Простые примеры римановых поверхностей.— Глава III. Теорема Коши (для границы области D, $f(r)$ регулярна в D, непрерывна в D). Интеграл Коши. Лемма Шварца. Теорема Лиувилля. Применение леммы Шварца (Жюлиа — Каратеодори; функции, ограниченные числом m на части границы и числом M $(>m)$ на остальной ее части).— Глава IV. Изолированные особенности. Теорема Вейерштрасса. Нули регулярной функции. Теорема Руше. Поведение около точки ∞. Сфера Римана. Формула Пуассона — Йенсена. Теорема Бляшке. Доказательство сходимости ряда Фурье для функции $\varphi(t)$ (ограниченной вариации) посредством интегрирования функции

$$F(z) = \int_0^{2\pi} e^{-z(u-t)}\, \varphi(u)\, du/(1 - e^{-2\pi z})$$

по кругу большого радиуса.— Глава V. Принцип выбора Витали и теорема Римана об отображении.— Глава VI. Ряд Тейлора, ряд Лорана, аналитическое продолжение, теорема Бюрманна — Лагранжа, сверхсходимость. Преобразование Лапласа. Индикатриса, сходимость по Борелю. Ряды Дирихле. Бесконечные произведения и адамарова теория целых функций.— Глава VII. Интегралы от аналитических функций, в частности гиперэллиптические и эллиптические интегралы. Принцип симметрии Шварца. Конформное отображение многоугольников. Модулярная функция. Теоремы Пикара, Шоттки, Ландау. Направления Жюлиа. Теорема Блоха.

Изложение ясное и целеустремленное. Предварительных знаний не предполагается, однако следует полагать, что недостаточность упражнений и чрезмерная стремительность изложения должны быть причиной больших трудностей для начинающего читателя. Но вместе с тем при использовании в качестве дополнительного источника эта книга может быть чрезвычайно полезной. В особенности заслуживает похвалы наличие прекрасного равновесия между геометрическим и аналитическим методами. Автор отчетливо склоняется к «чистым теоретико-функциональным методам». В некоторых случаях это приводит к отклонениям от обычно применяемого изложения; примером может служить появление рядов Тэйлора и Лорана, сильно запаздывающее по отношению к исследованию изолированных особенностей. Референт не видит в этом выгоды. Рассмотрение многих вопросов продвинуто гораздо дальше, чем это делается в большинстве элементарных учебников (например, принцип симметрии Шварца, теорема Пикара, функции, обращающиеся в нуль на дуге границы области, и пр.). В иных же случаях получается впечатление, что место и усилие можно было бы сэкономить в большей степени (для книги в целом), если бы исследование было продолжено, например, посредством включения принципа Линделёфа в его более общей форме или с использованием результатов Каратеодори по поводу принципа симметрии Шварца. Как бы то ни было, автор наметил очень хорошее построение курса, в одинаковой степени избегающее обеих опасностей — чрезмерной

детализации или излишней тенденции обеднить содержание. W. H. J. Fuchs

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 300.

3794 К. Аналитические функции. Валирон (Fonctions analytiques. Valiron Georges, Paris, Presses Universitaires de France, 1954, 236 pp., 1500 francs) (франц.)

Реферируемая монография посвящена избранным главам теории аналитических функций. Она предполагает знакомство только с элементами теории (кратко изложенными в первой вводной главе); особенность изложения состоит в отсутствии дублирования других хорошо известных монографий по теории функций. Особое внимание уделяется подробному разъяснению более элементарных частей изучаемой теории. Изобилие ссылок указывает путь к дальнейшему изучению рассматриваемых вопросов. Большое внимание обращено на геометрические приложения. В частности, сделан упор на важность понятия аналитического продолжения и римановой поверхности аналитической функции. В главе 1 изложены основные понятия теории аналитических функций, включая понятие аналитического продолжения. Теорема Римана о конформном отображении приведена без доказательства. Изложены некоторые результаты Шварца, включая определение отображающей функции для внутренности эллипса. В главе 2 рассмотрены некоторые вопросы теории однолистных функций (теоремы Бибербаха и Фабера, теорема Кебе об искажении, теорема Литтльвуда о коэффициентах разложения однолистной функции). В главе 3 излагаются две теоремы Фату. Первая из них — теорема Фату и Рисса о степенном ряде с радиусом сходимости, равным единице, коэффициенты которого образуют нуль-последовательность. Дано приложение этой теоремы к теореме Пуанкаре об аналитических функциях с естественной границей. Вторая из рассмотренных теорем Фату есть знаменитая теорема о существовании радиальных предельных значений. Глава заканчивается хорошо известной теоремой Ф. и М. Риссов.

Глава 4 посвящена поведению конформного отображения на границе области. Рассмотрено понятие об угловой производной. Главы 5 и 6 содержат теорию итераций аналитических функций. В главе 5 детально изучены функции Фату (отображающие однолистный единичный круг на n-листный). Аналитические функции, отображающие правую полуплоскость в себя, изучены в главе 6. Глава 7 посвящена функциям Пуанкаре, допускающим теорему умножения. В главе 8 изучаются некоторые классы аналитических функций, не допускающих аналитического продолжения. Дана конструкция, принадлежащая Валирону, гиперболической поверхности наложения с единственной логарифмической точкой на бесконечности и без других трансцендентных критических точек. В главе 9 излагаются методы Вимана и Валирона и их применения. В главе 10 изучается порядок роста решений алгебраических дифференциальных уравнений. Перечисленное содержание глав указывает на обилие материала. Изложение ясное. Эта книга будет иметь большое значение для изучения специальных глав теории аналитических функций. M. Heins

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 861.

3795 К. Некоторые теоремы об асимптотических разложениях и двойных интегралах. Бергхёйс (Some theorems on asymptotic expansions and double integrals. Berghuis J., Math. Centrum Amsterdam. Rekenafdeling, 1953, MR11, 38 pp.) (англ.)

В этом отчете собрано несколько теорем, которые используются в теории асимптотических вычетов и будут предметом последующего сообщения. Отчет состоит из четырех глав. В главе I рассматриваются теоремы разложения для интегралов. Типичный пример: пусть интеграл

$$J(u)=\int_{\xi}^{\eta}\varphi(x)\,dx,$$

где ξ и η — функции, существует для малых u; пусть $\xi(u)$ и $\eta(u)$ допускают асимптотические разложения для малых u. Если $\varphi(x)$ допускает асимптотическое разложение в окрестностях точек $x=\lim_{u\to 0}\xi$ и $x=\lim_{u\to 0}\eta$, то существует такая константа C, что $J(u)-C\ln u$ допускает для малых u асимптотическое разложение. Глава 2 посвящена асимптотическому разложению решения $p=p(u)$ уравнения $f(p)=u$, которое стремится к нулю вместе с u. Глава 3 содержит некоторые фундаментальные теоремы о несобственных двойных интегралах. Глава 4 содержит различные результаты, например аналитическое продолжение бэта-функции. H. A. Lauwerier

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 951.

3796 К. Квазиконформные отображения. Волковыский Л. И., Львов, Изд-во Львовск. ун-та, 1954, 156 стр., 5 р.

Систематическое изложение теории квазиконформных отображений (кв. к. от.), являющейся одним из основных направлений современной геометрической теории функций двух переменных.

Во введении формулируются основные задачи, возникшие в теории кв. к. от., и дается краткий очерк развития этой теории. В § 1 вводится понятие характеристик эллипса и аффинных отображений, доказывается ряд их элементарных свойств. В § 2 рассматриваются дифференцируемые отображения, в частности изучаются точки аффинности и условия моногенности отображения. В § 3 определяются понятия кв. к. от. с одной и двумя парами характеристик, доказываются некоторые их свойства и вводятся неоднолистные квазилинейные и нелинейные классы кв. к. от. § 4 посвящен доказательству дифференцируемости почти всюду кв. к. от. и суммируемости квадратов производных функций, задающих отображение, внутри области определения. Предварительно доказывается ряд лемм о растяжении при кв. к. от. В § 5 доказывается теорема о N-свойстве и формула Грина для кв. к. от., откуда выводится известная теорема Д. Е. Меньшова, дающая достаточные условия для того, чтобы само отображение или сопряженное с ним было голоморфной функцией.

В § 6 вводится понятие обобщенных решений эллиптической системы дифференциальных уравнений вида

$$au_x+bu_y=v_y,\quad du_x+cu_y=-v_x,\quad ac-\left(\frac{b+d}{2}\right)^2>0;$$

даются их интегральные представления, изучаются некоторые их дифференциальные свойства. § 7 содержит изложение связей между теми или иными свойствами характеристик и дифференциальными свойствами кв. к. от. Отмечается, что результаты этого § принадлежат главным образом Б. В. Шабату.

В основном § 8, § 9 и частично § 10 содержат изложение первой основной статьи М. А. Лаврентьева о кв. к. от. (Матем. сб., 1935, 42, 407—424). В § 8 доказывается теорема о равностепенной непрерывности, компактности кв. к. от., теорема о близости ε-кв. к. от. к конформному отображению и фундаментальное предложение о склеивании отображений. § 9 содержит изложение основной теоремы М. А. Лаврентьева из указанной выше статьи о существовании, кв. к. от. с заданной одной парой характеристик. Далее доказывается теорема о пределе равномерно сходящейся последовательности кв. к. от. с равномерно сходящейся последовательностью характеристик и указываются

некоторые усиления приведенных теорем. В § 10 даются примеры приложения теории кв. к. от. к различным математическим вопросам, например к проблеме типа римановой поверхности, к вопросу конформного отображения поверхностей, приведения в целом к каноническому виду дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, к теореме теории распределения значений целых и мероморфных функций. Прилагается список цитированной журнальной литературы и дается приложение, содержащее дополнительные сведения, необходимые для понимания содержания книги из теории функций действительного переменного, из дифференциальных уравнений с частными производными, из аналитических функций и из теории поверхностей, частью с доказательством, частью без него. Л. Д. Кудрявцев

3797 Д. Ядро функции и область регулярности в пространстве двух комплексных переменных. Мёринг (Kernfunktion und Regularitätsgebiete im Raum von zwei komplexen Veränderlichen. Mehring Johannes. Diss. Math.-naturwiss. F., Münster, 1953, III, 33 Bl., Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, B, № 15, 1088 (нем.)

См. также: 3618, 3620, 3749, 3750, 3751, 3752, 3753, 3754, 3755, 3756, 3817, 3823, 3893, 4100

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3798. Замечание о методе нахождения одного предела. Минь Сы-хао (談一個求極限的問題. 閔嗣鶴), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1954, 4, № 4, 381—385 (кит.; рез. русс.)

Непрерывная функция $\omega(u)$, удовлетворяющая дифференциально-разностному уравнению

$$d[u\omega(u)]/du = \omega(u-1)$$

для $u > 2$ и равная u^{-1} для $1 \leqslant u \leqslant 2$, имеет своим пределом при $u \to \infty$ $e^{-\gamma}$, где γ — постоянная Эйлера (этот результат получен Хуа Ло-гэном). При помощи операционного исчисления доказывается, что

$$|\omega(u) - e^{-\gamma}| < \exp\{-u(\ln u + \ln\ln u + (\ln u)^{-1}\ln\ln u - 1) + vu(\ln u)^{-1}\}$$

(оценка, полученная иным способом ранее также Хуа Ло-гэном). В. И. Левин

3799. К обобщению одной теоремы Мальмквиста. Кимура (Sur une généralization d'un théorème de Malmquist. Kimura Toshifusa), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1953, 2, № 1, 23—27 (франц.)

Мальмквист (Malmquist, J., Acta math., 1913, № 36, 297—343), рассматривая уравнение

$$dy/dx = P(x, y)/Q(x, y), \qquad (1)$$

где P и Q — полиномы по x и y, доказал, что если $x = 0$ есть изолированная существенно особая точка решения $y(x)$, имеющего конечное число ветвей, то (1) есть уравнение Риккати. Автором доказана теорема: Пусть дано уравнение

$$x^{\sigma+1}\,dy/dx = P(x, y)/Q(x, y),$$

где $\sigma \geqslant 0$ натуральное, а P и Q — полиномы по y, коэффициенты которых голоморфны вблизи $x = 0$, и пусть S — множество предельных точек для решения $y(x)$ при $x \to 0$. Тогда S есть либо точка, либо вся плоскость. Отсюда выводится (не вполне отчетливо, по мнению референта), что любое решение (1) принимает все значения, кроме конечного числа, в произвольной окрестности существенно особой точки. Р. Э. Виноград

3800. Замечание, касающееся асимптотических и сходящихся факториальных рядов в решении линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Эванс (Erratum to asymptotic and convergent factorial series in the solution of linear ordinary differential equations. Evans Robert L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, № 6, 1000 (англ.)

Исправление ошибки в работе автора (РЖМат, 1955, 1193). К. Я. Латышева

3801. К анализу затухания свободных колебаний. Каудерер (Zur Analyse der Dämpfung freier Schwingungen. Kauderer H.), Ingr-Arch., 1954, 22, № 4, 251—257 (нем.)

Рассматриваются колебания системы с одной степенью свободы, описываемые уравнением с постоянными коэффициентами

$$\ddot{q} + \omega^2 q + \varepsilon g(\dot{q}) = 0, \qquad (1)$$

где ε — малая величина (слабое затухание), а функция $g(\dot{q})$ может быть представлена в виде:

$$g(\dot{q}) = C_0\dot{q}/|\dot{q}|^{-1} + c_1\dot{q} + c_2|\dot{q}|\dot{q} + c_3|\dot{q}|^2\dot{q} + \cdots \qquad (2)$$

c_ν — неизвестные коэффициенты, которые приближенно определяются из последовательности амплитуд колебательного процесса и круговой частоты, после чего можно проанализировать силу затухания. Для определения C_ν при помощи способа Н. Крылова и Н. Боголюбова выводится с точностью до величин порядка ε следующая зависимость, дающая связь между коэффициентами C_ν и значениями соседних амплитуд:

$$A_k = \frac{1}{2}(q_k + q_{k+1}),$$

$$q_k - q_{k+1} = \frac{4}{\omega^2}\left[c_0 + \frac{\pi}{4}c_1A_k\omega + \frac{2}{3}c_2A_k^2\omega^2 + \cdots + \frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2\nu-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots2\nu}\frac{\pi}{2}c_{2\nu-1}A_k^{2\nu-1}\omega^{2\nu-1} + \frac{2\cdot4\cdot6\cdots2\nu}{3\cdot5\cdot7\cdots(2\nu+1)}c_{2\nu}A_k^{2\nu}\cdot\omega^{2\nu} + \cdots\right]. \qquad (3)$$

Практически определяются экспериментально амплитуды $q_0, q_1, \ldots, q_k, \ldots$, а также круговая частота ω, после чего из соотношений (3) находятся c_ν. Указан также прием непосредственного составления диаграммы сил затухания. Ю. А. Митропольский

3802. Об определении асимптотики функции $q(x)$ по свойствам спектральной функции оператора $-y'' + q(x)y$. Нейгауз М. Г., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 1, 25—28

Рассматривается уравнение

$$y'' + \{\lambda - q(x)\}y = 0 \qquad (0 \leqslant x < \infty) \qquad (1)$$

с граничным условием

$$y(0) = 0,\ y'(0) = 1. \qquad (2)$$

Пусть $\rho(\lambda)$ есть спектральная функция задачи (1)—(2) и $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda) - \frac{2}{3\pi}\lambda^{3/2}$ для $\lambda \geqslant 0$ и $\sigma(\lambda) = \rho(\lambda)$ для $\lambda < 0$. Пусть

$d\rho(s^2)/ds = s^2\alpha(s)$, $d\sigma(s^2)/ds = s^2\beta(s)$ $(s^2 = \lambda,\ \lambda > 0)$, т. е. $\alpha(s) = 2/\pi + \beta(s)$. Сформулированы следующие теоремы:

I. Если: а) $\int_0^\infty |\beta^{(l)}(s)|\,ds < \infty$, $l = 0, 1, 2, \ldots, m-1$, $\int_0^\infty s\,|\beta^{(m)}(s)|\,ds < \infty$, б) $\beta^{(l)}(0) = 0$, $l = 1, 2, \ldots, \ldots, 2r+1$ $(2r+1 \leqslant m-2)$, в) функция $g(z) = \int_0^\infty \cos sz\,\beta(s)\,ds$ имеет непрерывную первую производную, г) $\sup_x \int_0^\infty \left| \int_0^\infty \sin sx \sin sy\,\beta(s)\,ds \right| dy < 1$ и д) для $\lambda < 0$ $\rho(\lambda)$ кусочно-постоянна и имеет k скачков $(k \leqslant m-2)$, — то при $x \to +\infty$

$$q(x) = O(1/x^{m-1-2k}).$$

II. Если: а) существует целая функция $\gamma(s)$ комплексного переменного s совпадающая для $s \geqslant 0$ с $1/\alpha(s) > 0$, четная на вещественной оси и такая, что для всех комплексных s выполняется неравенство $|\gamma(s)| < Ce^{A|s|}$, б) для вещественного s и $s \to +\infty$ $\beta^{(l)}(s) = O(1/s^2)$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, в) для $\lambda < 0$ $\rho(\lambda) \equiv 0$, — то соответствующий $\rho(\lambda)$ потенциал $q(x)$ при $x > A/2 \equiv 0$. Доказательство теоремы II намечено.

Б. М. Левитан

3803. О спектральных функциях дифференциальных операторов. Штраус А. В., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 4, 201—220

Изучаются на полупрямой $(0, \infty)$ обобщенные резольвенты (Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов, Гостехтеориздат, М.—Л., 1950, 377) квазидифференциальной операции

$$l = -\frac{d}{dx}\,p\,\frac{d}{dx} + q, \qquad (1)$$

где $p(x)$ и $q(x)$ измеримы и вещественны и для любого конечного $b > 0$

$$\int_0^b |p(x)|^{-1}\,dx < +\infty, \quad \int_0^b |q(x)|\,dx < +\infty.$$

Предполагается, что оператор (1) имеет индекс дефекта (1.1).

Доказывается теорема: Совокупность всех обобщенных резольвент оператора l определяется по формуле

$$R_\lambda f = \psi(x, \lambda)\int_0^x f(s)\,u_1(s, \lambda)\,ds + u_1(x, \lambda)\int_0^\infty f(s)\,\psi(s, \lambda)\,ds - [\theta(\lambda) + m(\lambda)]^{-1}\psi(x, \lambda)\int_0^\infty f(s)\,\psi(s, \lambda)\,ds \quad (\operatorname{Im}\lambda > 0),$$

где $u_1(x, \lambda)$, $u_2(x, \lambda)$ — решения уравнения (1), удовлетворяющие соответственно начальным условиям

$$u_1(0, \lambda) = 1, \quad p(x)\,u_1'(x, \lambda)|_{x=0} = 0,$$

$$u_2(0, \lambda) = 0, \quad p(x)\,u_2'(x, \lambda)|_{x=0} = -1;$$

$\psi(x, \lambda) = u_2(x, \lambda) + m(\lambda)\,u_1(x, \lambda) \in L_2(0, \infty)$; $\theta(\lambda)$ — произвольная регулярная в верхней полуплоскости функция с неотрицательной мнимой частью, или бесконечность. Различным $\theta(\lambda)$ соответствуют различные резольвенты. Самосопряженные расширения получаются, если $\theta(\lambda)$ есть вещественная константа или бесконечность.

Изучается также структура обобщенного разложения единицы E_t оператора l. Доказывается теорема: Оператор $E_\beta - E_\alpha$ есть интегральный оператор с ядром Карлемана

$$K(x, s) = \sum_{i,k=1}^{2} \int_\alpha^\beta u_j(x, \sigma)\,u_k(s, \sigma)\,d\rho_{jk}(\sigma),$$

причем

$$p_{j\bar{k}}(t) = \frac{1}{\pi}\lim_{\tau \to +0} \int_0^t \operatorname{Im}\Phi_{jk}(\sigma + i\tau)\,d\sigma,$$

где

$$\Phi_{11}(\lambda) = m(\lambda)\,\theta(\lambda)\,[\theta(\lambda) + m(\lambda)]^{-1},$$

$$\Phi_{22}(\lambda) = -[\theta(\lambda) + m(\lambda)]^{-1},$$

$$\Phi_{12}(\lambda) = \Phi_{21}(\lambda) = -m(\lambda)\,[\theta(\lambda) + m(\lambda)]^{-1}. \qquad (\operatorname{Im}\lambda > 0).$$

Б. М. Левитан

3804. О дифференциальном операторе, порожденном системой дифференциальных выражений второго порядка. Биглов З. И., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 4, 495—497

Рассматривается система n дифференциальных выражений второго порядка, которая в матрично-векторной форме имеет вид

$$ly = y'' + P(x)\,y \qquad (0 \leqslant x < \infty), \qquad (1)$$

где $P(x)$ — вещественная симметрическая матрица, суммируемая в каждом конечном интервале; $y(x) = (y_1(x), \ldots, y_n(x))$ — вектор-функция, компоненты которой $y_k(x)$ — скалярные функции. Вводится гильбертово пространство $L_n^{(2)}(0, \infty)$ вектор-функций со скалярным произведением $(y, z) = \int_0^\infty \sum_{k=1}^n y_k(x)\overline{z_k}(x)\,dx$.

1. Вводится, известным образом, оператор L_0 с минимальной областью определения, порождаемый дифференциальным выражением ly. Для этого оператора формулируются результаты, аналогичные результатам И. М. Глазмана (Успехи матем. наук, 1950, 5, № 6 (40), 102—135), в частности указывается, что дефектное число m оператора L_0 удовлетворяет неравенству $n \leqslant m \leqslant 2n$.

2. Рассматривается самосопряженное расширение L_θ оператора L_0, определенное краевыми условиями

$$y'(0) = \theta y(0), \qquad (2)$$

где θ — вещественная симметрическая матрица. (Подобное расширение существует лишь при $m = n$, что не отмечено в статье). Пусть $\Omega_1(x, \lambda)$, $\Omega_2(x, \lambda)$ — матрицы из линейно независимых решений уравнения

$$ly - \lambda y = 0. \qquad (3)$$

Их линейные комбинации $\Omega_1 c_1 + \Omega_2 c_2$ (c_1, c_2 — постоянные векторы), удовлетворяющие краевым условиям (2), имеют вид $y(x, \lambda) = \Omega(x, \lambda)\,C$; где $\Omega(x, \lambda)$ — матрица из n линейно независимых решений уравнения (3), C — постоянный вектор. В этих обозначениях формулируется теорема 1 (равенство Парсеваля).

Пусть $f(x) \in L_n^{(2)}(0, \infty)$. Существует не зависящая от $f(x)$ монотонно возрастающая матричная функция распределения $T(\lambda)$ n-го порядка и вектор-функция $F(\lambda)$ (обобщенное преобразование Фурье) такие, что

$$\|f(x)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F^*(\lambda)\,dT(\lambda)\,F(\lambda). \qquad (4)$$

$F(\lambda)$ является пределом в среднем квадратичном последовательности непрерывных вектор-функций

$$F_m(\lambda) = \int_0^m \Omega^*(x, \lambda) f(x)\, dx,$$

т. е. $\lim_{m\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (F - F_m)^*\, dT(\lambda)\, (F - F_m) = 0.$

(отметим, что матрица $\Omega(x, \lambda)$ требует специальной нормировки при $x = 0$, что не отмечено в статье).

3. Для того случая, когда матрица $P(x)$ в дифференциальном выражении (1) суммируема в промежутке $(0, \infty)$, имеет место: 1) Индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n). Любое самосопряженное расширение оператора L_0 определяется краевыми условиями (2). 2) Для решений $\Omega_1(x, \lambda), \Omega_2(x, \lambda)$ справедливы асимптотические формулы $\Omega_1(x, \lambda) = e^{i\sqrt{\lambda x}}[I + 0(1)]$; $\Omega_2(x, \lambda) = e^{-i\sqrt{\lambda x}}[I + 0(1)]$ при $x \to \infty$. Здесь $0(1)$ — матрица, все элементы которой стремятся к нулю, I — единичная матрица. 3) Спектр оператора L_θ для отрицательных λ дискретен и ограничен снизу, для положительных λ — непрерывен. С. А. Орлов

3805. О колебаниях систем с распределенными параметрами при прохождении через резонанс. Моссеенков Б. И., Студ. наук праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 49—64

Рассматривается система линейных дифференциальных уравнений с медленно меняющимися коэффициентами вида:

$$\frac{d}{dt}\left\{\sum_{i=1}^{N} a_{ij}(\tau)\dot{q}_i\right\} + \sum_{i=1}^{N} b_{ij}(\tau) q_i = \varepsilon Q_j(\tau, \theta) + \varepsilon \sum_{i=1}^{N} \lambda_{ij}(\tau)\dot{q}_i, \qquad (j = 1, 2, \ldots, N), \qquad (1)$$

где ε — малый положительный параметр, $\tau = \varepsilon t$,

$$a_{ij}(\tau) = a_{ji}(\tau), \quad b_{ij}(\tau) = b_{ji}(\tau), \quad d\theta/dt = \nu(\tau),$$

функции $a_{ij}(\tau)$, $b_{ij}(\tau)$, $\lambda_{ij}(\tau)$, $\nu(\tau)$ неограниченно дифференцируемы по τ на конечном интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$, $Q_j(\tau, \theta) = E_j(\tau)\sin\theta$ и, кроме того, выполняются условия: 1) единственным статическим решением «невозмущенной» системы уравнений (т. е. системы (1) при $\varepsilon = 0$ и $\tau = \text{const}$) является тривиальное решение $q_1 = q_2 = \ldots = q_N = 0$; 2) Для любых τ ни «частота» $\omega_1(\tau)$, ни одни из обертонов «частоты» $\omega_1(\tau)$ не равны какой-либо «собственной частоте» $\omega_2(\tau)$, $\omega_3(\tau)$, ..., $\omega_N(\tau)$ «невозмущенной» системы.

При этих предположениях приближенное частное решение системы (1), соответствующее основному резонансу в динамической системе, описываемой дифференциальными уравнениями (1), находится при помощи асимптотических методов Крылова-Боголюбова. Решение ищется в виде рядов:

$$q_i = \varphi_i^{(1)}(\tau) a\cos(\theta + \psi) + \varepsilon U_i^{(1)}(\tau, a, \theta, \theta + \psi) + \varepsilon^2 U_i^{(2)}(\tau, a, \theta, \theta + \psi) + \ldots, \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

где a и ψ должны удовлетворять системе

$$da/dt = \varepsilon A_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 \ldots,$$
$$d\psi/dt = \omega_1(\tau) - \nu(\tau) + \varepsilon B_1(\tau, a, \psi) + \varepsilon^2 \ldots, \qquad (3)$$

а $\omega_1(\tau)$ и $\varphi_i^{(1)}(\tau)$ — соответственно «частота» и «нормальные» функции «невозмущенной» системы; $U_i^{(k)}(\tau, a, \theta, \theta + \psi)$ — периодические функции по обеим угловым переменным θ и $\theta + \psi$ с периодом 2π.

Ввиду того, что систему (3) можно формально составить, исходя непосредственно из выражений потенциальной и кинетической энергии для данной динамической системы (см., например, Прикл. матем. и механика, 1950, 14, № 2, 139—170), излагаемая методика переносится на исследование динамических систем с бесконечным числом степеней свободы, описываемых линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с медленно меняющимися коэффициентами. В качестве примера рассматриваются поперечные колебания балки под воздействием медленно передвигающихся груза и возмущающей пульсирующей силы при неустановившемся режиме — при прохождении через основной резонанс. Ю. А. Митропольский

3806. О взаимном влиянии гармоник в нелинейных системах при проходе через резонанс. Рубаник В. П., Студ. наук. праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 83—105

Рассматривается нелинейная колебательная система с одной степенью свободы, находящаяся под воздействием внешнего возмущения и описываемая дифференциальным уравнением

$$\frac{d}{dt}\left\{m(\tau)\frac{dx}{dt}\right\} + b(\tau)\frac{dx}{dt} + c(\tau)x = \varepsilon f\left(\tau, x, \frac{dx}{dt}\right) + \sum_{k=1}^{N} M_k(\tau)\cos\theta_k, \qquad (1)$$

где ε — малый параметр; $\tau = \varepsilon t$ — «медленное» время, $d\theta_k/dt = \nu_k(\tau)$, $m(\tau) > 0$, $b(\tau) > 0$, $c(\tau) > 0$, $\nu(\tau) > 0$ и дифференцируемы на некотором конечном интервале $0 \leqslant \tau \leqslant L$; $b(\tau)$ — величина малая по сравнению с $\sqrt{m(\tau)c(\tau)}$; функция $f(\tau, x, dx/dt)$ неограниченно дифференцируема при всех конечных значениях своих аргументов.

Для дифференциального уравнения (1) определяется при помощи асимптотических методов Крылова-Боголюбова частное решение в виде

$$x = \sum_{k=1}^{N} a_k(\tau)\cos[\theta_k + \varphi_k(\tau)] + \varepsilon U_1(\tau, a_j, \varphi_j, \theta_j) + \varepsilon^2 U_2(\tau, a_j, \varphi_j, \theta_j) + \varepsilon^3, \ldots, \qquad (2)$$

где $U_1, U_2, \ldots$ — периодические по каждому из аргументов $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ с периодом 2π, а a_k, φ_k — функции времени, определяемые системой уравнений:

$$da_k/dt = \varepsilon A_k^{(1)}(\tau, a_j, \varphi_j) + \varepsilon^2 A_k^{(2)}(\tau, a_j, \varphi_j) + \ldots$$
$$d\varphi_k/dt = \varepsilon B_k^{(1)}(\tau, a_j, \varphi_j) + \varepsilon^2 B_k^{(2)}(\tau, a_j, \varphi_j) + \ldots$$
$$(k = 1, 2, \ldots, N).$$

Приводятся явные выражения для функций

$$U_1, U_2, \ldots, A_k^{(1)}, A_k^{(2)}, \ldots, B_k^{(1)}, B_k^{(2)}, \ldots$$
$$(k = 1, 2, \ldots, N).$$

Рассматривается пример взаимного влияния гармоник на нелинейную систему, описываемую уравнением:

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + \beta x + \gamma x^3 = M\cos\Theta_1 + N\cos\Theta_2,$$

где $d\Theta_1/dt = \nu_1(\tau)$, $d\Theta_2/dt = \nu_2(\tau)$, $\tau = \varepsilon t$, m, α, β, γ,

M, N — константы, причем m, α, β — положительные.

Для уравнения (4) построено первое приближение и исследован как стационарный режим при взаимном влиянии гармоник, так и нестационарный, в частности последовательное прохождение частот внешних сил через резонанс. Получены графики резонансных кривых и кривых прохождения через резонанс, которые отчасти совпадают, а отчасти дополняют теоретические и экспериментальные результаты, полученные А. И. Чекмаревым (Динамика и прочность коленчатых валов. Ч. II, Москва, 1950, 75—96). Ю. А. Митропольский

3807. Об особых точках обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. II. Кимура (Sur les points singuliers des équations différentielles ordinaires du premier ordre, II. Kimura Toshifusa), Comment. math. Univ. St. Pauli, 1954, **3**, № 1, 43—49 (франц.)

Като (Katô T., Natur. Sci. Rept Ochanomizu Univ., 1951, **2**, 13—17) доказал следующую теорему: Пусть дано дифференциальное уравнение

$$x^{\sigma+1}\,dy/dx = P(x,\ y)/Q(x,\ y), \qquad (1)$$

где σ — целое неотрицательное число, $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$ — полиномы относительно y, без общих множителей, коэффициенты которых голоморфны по x в окрестности начала координат, причем $P_0(y) = P(0,\ y) \not\equiv 0$, $Q_0(y) = Q(0,\ y) \not\equiv 0$, и пусть для несократимой дроби $Q_0'(y)/P_0'(y) \equiv Q_0(y)/P_0(y)$ никакая комбинация вычетов в сумме не дает чисто мнимое число (условие (A)). Тогда любое решение $y = y(x)$ уравнения (1) при $x \to 0$ ($x > 0$) или 1) стремится к корню уравнения $P_0(y) = 0$, или 2) существует убывающая последовательность $\{x_n\}$ такая, что $y(x_n)$ сходится к некоторому кратному корню уравнения $P_0'(y) = 0$.

Для $\sigma = 0$ доказывается, что возможность 2) отпадает, т. е. здесь $\lim_{x \to +0} y(x) = y_0$, где y_0 — корень уравнения $P_0(y) = 0$.

Если для уравнения (1) при $\sigma = 0$ не выполнено условие (A), то можно утверждать лишь, что $y(x) \to y_0$, когда x неограниченно приближается к началу координат по некоторым спиралям комплексной плоскости. Как обобщение отмечается, что результаты автора остаются верными также, если коэффициенты полиномов $P(x,\ y)$ и $Q(x,\ y)$, не будучи голоморфными при $x = 0$, имеют при $x \to 0$ асимптотические представления в форме степенных рядов. Б. П. Демидович

3808. Об асимптотическом поведении интегралов систем дифференциальных уравнений в окрестности точки асимптотической особенности. Миколайская (Sur l'allure asymptotique des intégrales des systèmes d'équations différentielles au voisinage d'un point asymptotiquement singulier. Mikołajska Z.), Ann. polon. math., 1955, **1**, № 2, 277—305 (франц.)

Пусть $(\alpha,\ \beta)$ — максимальный интервал, в котором существует решение системы

$$dz/dt = f(t,\ z)$$

(z, $f(t,\ z)$ — векторы). Точка z_0 называется точкой сильной асимптотической особенности (с. а. о.) системы (1), если существует окрестность этой точки такая, что 1) любое решение, которое входит в эту окрестность при $t = t_0$ и остается в ней для всех $t < \beta$, стремится при $t \to \infty$ к z_0; 2) существует хотя бы одно подобное решение. (Так, например, для системы

$$\dot{z}_1 = a_1 z_1 + b_1 z_2,\ \dot{z}_2 = a_2 z_1 + b_2 z_2$$

точка $z_1 = z_2 = 0$ является точкой с. а. о. в случае устойчивости узла, фокуса и в случае седла и не является ею в случае центра.)

Для системы

$$dx/dt = F(t,\ x,\ y),\ dy/dt = G(t,\ x,\ y) \qquad (1)$$

(x, y — векторы порядка p и q) при ряде предположений о функциях F и G оценивается число существенных параметров, от которых зависит семейство решений $x(t)$, $y(t) \to 0$. Дается достаточное условие того, чтобы начало координат было точкой с. а. о. системы (1).

Для того чтобы начало координат было точкой с. а. о. для системы

$$dx/dt = Ax + f(t,\ x), \qquad (2)$$

достаточно выполнения условий: 1) Решение существует и единственно в некоторой окрестности начала координат при $0 \leqslant t \leqslant \infty$; 2) в этой окрестности вектор-функция $f(t,\ x)$ непрерывна и $|f(t,\ x)| < N|x|$ для некоторого $N > 0$; 3) имеется $q > 0$ собственных значений λ_j матрицы A с $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ и нет собственных значений с $\operatorname{Re}\lambda_j = 0$. При этом семейство интегралов, стремящихся к нулю, зависит от q существенных параметров.

Доказательства проводятся топологическим методом Важевского (Ważewski T., Ann. Soc. polon. math., 1947, **20**, 279—313). В. А. Якубович

3809. Об устойчивости тривиального решения систем второго порядка. Разумихин Б. С., Прикл. матем. и механика, 1955, **19**, № 3, 279—286

Рассматриваются вопросы устойчивости решения $x_1 = x_2 = 0$ систем дифференциальных уравнений второго порядка, правые части которых содержат две нелинейные функции. Задача решается построением функций Ляпунова вида

$$V(x_1,\ x_2) = 2\left\{\int_0^{x_1} \alpha_{11}(t)\,t\,dt + \alpha_{12}x_1x_2 + \int_0^{x_2} \alpha_{22}(t)\,t\,dt\right\}. \qquad (1)$$

Дается графический метод построения областей устойчивости. Так, для системы

$$\dot{x}_1 = p_{11}(x_1)\,x_1 + p_{12}(x_1)\,x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 \qquad (2)$$

можно построить функцию Ляпунова (1), обеспечивающую асимптотическую устойчивость при любых начальных отклонениях, если линия $p_{11} = p_{11}(x_1)$, $p_{12} = p_{12}(x_1)$ ($-\infty < x_1 < \infty$) на плоскости p_{11}, p_{12} расположена внутри угла, стороны которого являются огибающими некоторого семейства парабол. Устанавливается, что в качестве такого угла можно выбрать область

$$p_{11} < 0,\quad p_{12} < 0, \qquad (3)$$

т. е. решение $x_1 = x_2 = 0$ системы (2) при выполнении условий (3) асимптотически устойчиво (коэффициенты p_{ij} предполагаются ограниченными.) Подобными рассуждениями доказываются следующие критерии устойчивости:

1. Решение $x_1 = x_2 = 0$ системы

$$\dot{x}_1 = p_{11}(x_2)\,x_1 + p_{12}(x_2)\,x_2,\qquad \dot{x}_2 = x_1$$

асимптотически устойчиво при выполнении условий (3).

2. Решение $x_1 = x_2 = 0$ системы уравнений

$$\dot{x}_1 = p_{11}(x_1)\,x_1 + p_{12}(x_1)\,x_2,\ \dot{x}_2 = x_1 \pm x_2$$

асимптотически устойчиво в целом, если коэффициенты p_{ij} таковы, что точка с координатами p_{11}, p_{12} при

всех x_1 остается внутри области, ограниченной прямыми

$$(\alpha_{12}p_{12} \pm \alpha_{22})(p_{11} \mp p_{12})(-\alpha_{22}p_{11} + \alpha_{12}p_{12}) = 0,$$

где α_{12}, α_{22} — фиксированные постоянные.

Указаны некоторые критерии устойчивости для системы уравнений

$$\dot{x}_1 = p_{11}(x_1, x_2)\,x_1 + p_{12}(x_1, x_2)\,x_2; \qquad \dot{x}_2 = x_1 \pm x_2.$$

Н. Н. Красовский

3810. Замечание об ограниченности решений системы дифференциальных уравнений. Йосидзава (Note on the boundedness of solutions of a system of differential equations. Yoshizawa Tarô), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, **A28**, № 3, 293—298 (англ.)

Рассматривается система

$$dy / dx = f(x, y), \qquad (1)$$

где y — вектор, $f(x, y)$ — непрерывная вектор-функция для $0 \leqslant x < \infty$, $\|y\| < \infty$. Единственность решений не предполагается.

I. Для того чтобы для данных чисел $\beta > \alpha > 0$ любое решение $y(x)$ системы (1) такое, что $\|y(0)\| \leqslant \alpha$, удовлетворяло неравенству $\|y(x)\| < \beta$, $0 \leqslant x < \infty$, необходимо и достаточно, чтобы в области $0 \leqslant x < \infty$, $\|y\| \leqslant \beta$ существовала непрерывная и неотрицательная функция $\Phi(x, y)$ такая, что 1) при $\|y\| \leqslant \alpha$ $\Phi(0, y) = 0$; 2) при $0 \leqslant x < \infty$, $\|y\| = \beta$ $\Phi(x, y) > 0$; 3) $\Phi(x, y)$ удовлетворяет локально условиям Липшица по y и при $0 \leqslant x < \infty$, $\|y\| < \beta$

$$\overline{\lim}_{h \to 0} h^{-1} \{\Phi(x + h,\ y + hf) - \Phi(x, y)\} \leqslant 0.$$

II. Для справедливости утверждений I необходимо и достаточно, чтобы для любого $\gamma > \alpha$ существовала неотрицательная функция $\Phi(x, y)$, такая, что: 1) при $\|y\| \leqslant \alpha$ $\Phi(0, y) > 0$; 2) при $0 \leqslant x < \infty$, $\|y\| = \gamma$ $\Phi(x, y) = 0$; 3) для любого решения $y = y(x)$ системы (1) $\Phi[x, y(x)]$ — неубывающая функция x.

III. P — произвольная точка. Для того чтобы любое решение, проходящее через точку P, удовлетворяло условию

$$\|y(x)\| \leqslant \alpha(P) < \infty \qquad \text{для } x_P \leqslant x < \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $\Phi(x, y)$ такая, что: 1) $\Phi(x, y) \to 0$ равномерно по x при $\|y\| \to \infty$; 2) Для любого решения $y = y(x)$ $\Phi[x, y(x)]$ — неубывающая функция x.

Достаточность во всех случаях очевидна. Доказывается необходимость. В. А. Якубович

3811. Об устойчивости по Ляпунову некоторого класса линейных дифференциальных уравнений. Кононов В. А., Сб. студ. науч. работ Одесск. ун-та, 1954, **3**, 233—240

Рассматривается система дифференциальных уравнений

$$dx_i / dt = p_{i1}(t)\,x_1 + p_{i2}(t)\,x_2, \quad i = 1, 2,$$

где $p_{ik}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции. Производится преобразование системы по формулам

$$y_1 = (p_{11} - \lambda_1)\,x_1 + p_{12}\,x_2, \quad y_2 = (p_{11} - \lambda_2)\,x_1 + p_{12}\,x_2,$$

где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$ — корни обобщенного характеристического уравнения $\|p_{ij}(t) - \delta_{ij}\lambda\| = 0$ $(i, j = 1\ 2)$, где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$. На коэффициенты преобразования наложены ограничения, обеспечивающие эквивалентность решений x_i и y_i в отношении устойчивости. Получается система четырех дифференциальных уравнений для действительных и мнимых частей функций y_i, для которой находится функция Ляпунова; на основе ее выводятся достаточные условия устойчивости для случаев мнимых и действительных p_{ik}. Приводится пример, когда система оказывается устойчивой при $\operatorname{Re}\lambda_i > 0$. М. И. Минкевич

3812. О сохранении асимптотической устойчивости при переходе от дифференциальных уравнений к соответствующим разностным. Скалкина М. А., Докл. АН СССР, 1955, **104**, № 4, 505—508

Наряду с системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$dx_k / dt = X_k(t, x_1, \ldots, x_n), \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (1)$$

рассматривается система конечноразностных уравнений

$$x^h_{k,\,m+1} = x^h_{k,\,m} + hX_k(t_m, x^h_{1,\,m}, \ldots, x^h_{h,\,m}), \qquad (2)$$

где $X_k(t, 0, \ldots, 0) = 0$, h — шаг разностного уравнения, $m \geqslant 0$ — целое число, $x^h_{k,\,m} = x^h_k(t_0 + mh)$, $X_k(t, x_1, \ldots, x_n)$ определены в области $|x_k| \leqslant H$, $0 \leqslant t < \infty$, причем в этой области $\partial X_k / \partial x_i$ ограничены, а $\partial X_k / \partial t$ удовлетворяют условиям Липшица по $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Доказано, что если любое решение системы (1) с начальными значениями в области $|x_k(t_0)| \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant t_0 < \infty$ удовлетворяют неравенству $|x_k(t, t_0)| < Bxe^{-\alpha(t - t_0)}$, где B и α — положительные числа, не зависящие от $t_0, x_1(t_0), \ldots, x_n(t_0)$, то тривиальное решение системы (2) при достаточно малом h будет асимптотически равномерно относительно $t_0, x^h_{10}, \ldots, x^h_{n0}$ устойчиво. С другой стороны, если для любого решения системы (2) при некотором достаточно малом $h > 0$, с начальными значениями из области $|x^h_{k0}| \leqslant x \leqslant H$, $0 \leqslant t_0 < \infty$ выполняются неравенства $|x^h_{km}| < Bxe^{-\alpha mh}$, где B и α — положительные, не зависящие от $t_0, x^h_{10}, \ldots, x^h_{n0}$, то нулевое решение системы (1) асимптотически равномерно относительно $t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}$ устойчиво.

Е. А. Барбашин

3813. Осцилляционные теоремы для канонической системы дифференциальных уравнений. Лидский В. Б., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 5, 877—880

Рассматривается система $2k$ уравнений

$$\frac{d}{dt} Y = IH(t)\,Y, \qquad (1)$$

где $H(t)$ — вещественная симметрическая матрица порядка $2k$ с кусочно-непрерывными элементами, $Y(t)$ — матрица решений, I — постоянная матрица вида

$$I = \begin{pmatrix} 0 & E_k \\ -E_k & 0 \end{pmatrix}$$

(E_k — единичная матрица порядка k)

$$H(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) & h_2(t) \\ h_3(t) & h_4(t) \end{pmatrix},$$

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_3(t) & y_4(t) \end{pmatrix}, \quad Y(0) = E_{2k}$$

$h_s(t)$, $y_s(t)$ — квадратные матрицы порядка k $(s = 1, 2, 3, 4)$.

Теорема 1. Матрица $u(t)$

$$u(t) = [y_1(t) - iy_2(t)]^{-1}[y_1(t) + iy_2(t)] \qquad (2)$$

является унитарной и симметрической при всех значениях параметра t.

Теорема 2. Пусть матрица коэффициентов канонической системы (1) такова, что $h_4(t) > 0$. Тогда все собственные значения матрицы $u(t)$: $\rho_1(t), \rho_2(t), \ldots \ldots \rho_k(t)$ монотонно вращаются по единичной окружности против часовой стрелки

$$\frac{d}{dt} \operatorname{Arg} \rho_s(t) > 0, \quad s = 1, \ldots, k.$$

Теорема 3. Определитель матрицы $y_2(t)$ (соответственно $y_1(t)$) обращается в нуль при тех и только тех значениях параметра t, при которых матрица $u(t)$ обладает собственным значением, равным $+1$ (соответственно -1). При этом размерность нулевого собственного подпространства матрицы $y_2(t)$ (и $y_1(t)$) равна размерности собственного подпространства матрицы $u(t)$, соответствующего собственному значению $+1$ (и -1).

Теорема 4. Пусть $\frac{d}{dt} Y_1 = iH_1(t) Y_1$ и $\frac{d}{dt} Y_2 = iH_2(t) Y_2$ — две канонические системы, матрицы коэффициентов которых удовлетворяют неравенству $H_1(t) > H_2(t)$. Тогда непрерывно зависящие от параметра t собственные значения $\rho_s^{(1)}(t)$ и $\rho_s^{(2)}(t)$ $(s = 1, \ldots, n)$ унитарных матриц $u^{(1)}(t)$ и $u^{(2)}(t)$, которые соответствуют рассматриваемым системам по формуле (2), можно занумеровать так, чтобы для всех $t > 0$ выполнялись неравенства

$$\operatorname{Arg} \rho_s^{(1)}(t) > \operatorname{Arg} \rho_s^{(2)}(t),$$

т. е. собственные значения матрицы $u^{(1)}(t)$ вращаются «впереди» собственных значений матрицы $u^{(2)}(t)$.

В. И. Зубов

3814. Об устойчивости сверху наибольшего характеристического показателя. Былов Б. Ф., Докл. АН СССР, 1955, 103, № 2, 181—184

В системе дифференциальных уравнений

$$dx_i / dt = p_{ii}(t)\, x_i + F_i(t, x_1, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

функции p_{ii}, F_i непрерывны и удовлетворяют условиям:

$$|F_i(t, x_1', \ldots, x_n') - F_i(t, x_1'', \ldots, x_n'')| \leqslant \leqslant \delta \sum_{i=1}^{n} |x_i' - x_i''|, \qquad (2)$$

$$F_i(t, 0, \ldots, 0) = 0,$$

$p_{ii}(t)$ ограничены при $t \to \infty$ и существует предел

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t p_{ii}(t)\, dt = \lambda_i.$$

Наибольший характеристический показатель $\Lambda = \max \lambda_i$ называется устойчивым сверху, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых F_i, удовлетворяющих условиям (2), характеристический показатель любого решения системы (1) не превосходит $\Lambda + \varepsilon$.

Для устойчивости сверху наибольшего характеристического показателя Λ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\alpha > 0$ и любой непрерывной и ограниченной функции $g(t)$ такой, что $\lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t g(t)\, dt = \Lambda$ существовали постоянная $C(\alpha)$ и функция $f_\alpha(t)$, такие, что

$$\overline{\lim}_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t f_\alpha(s)\, ds \leqslant \alpha,$$

$$\exp\left\{\int_\tau^t [p_{ii}(s) - g(s)]\, ds\right\} \leqslant \leqslant C(\alpha) \exp\left[\alpha(t-\tau) + \int_\tau^t f_\alpha(s)\, ds\right] \qquad (3)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n)$$

при любых $t \geqslant \tau \geqslant 0$. Если система первого приближения правильная и имеет общий вид, то после приведения ее к треугольному виду выполнение для диагональных коэффициентов условий (3) эквивалентно, как утверждает автор, выполнению условия

$$\|X(t) X(\tau)^{-1}\| \leqslant C_1(\alpha) \exp\left[(\Lambda + \alpha)(t-\tau) + \int_\tau^t f_\alpha(s)\, ds\right]$$

($X(t)$ — фундаментальная система решений уравнения первого приближения), которое является достаточным условием устойчивости Λ в общем случае.

В. А. Якубович

3815. Нелокальные теоремы существования и теоремы единственности для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Красносельский М. А., Крейн С. Г., Докл. АН СССР, 1955, 102, № 1, 13—16

Рассматривается уравнение

$$dx / dt = f(x, t), \qquad (1)$$

где $f(x, t)$ $(x \in E, \ -\infty < t < \infty)$ — непрерывный оператор со значениями в банаховом пространстве E. Приводится локальная теорема существования решения уравнения (1) в предположении, что $f(x, t) = f_1(x, t) + f_2(x, t)$, где оператор $f_1(x, t)$ вполне непрерывен, а оператор $f_2(x, t)$ удовлетворяет условию Липшица. Далее вводятся следующие предположения: а) $\sup_{\|x\| < a, |t| \leqslant a} \|f(x, t)\| < \infty$ при любом $a > 0$; б) $L(u)$, $\psi(t)$ — неотрицательные функции, $L(u)$ непрерывна, $\psi(t)$ — интегрируема на каждом конечном сегменте; в) $\{\Phi_i(x)\}_{i=1}^m$ — неотрицательные функционалы, определенные на E и такие, что их градиенты Γ_i являются непрерывными на E операторами; г) $\Phi(x) = \max_i \Phi_i(x)$; д) $j(x)$ — любой из индексов i, для которого $\Phi_i(x) = \Phi(x)$.

В предположениях а) — д) высказываются следующие утверждения: 1) если $\int^\infty du / L(u) = \infty$, $\Phi(x) \to \infty$ при $\|x\| \to \infty$ и $(\Gamma_{j(x)}(x), f(x, t)) \leqslant L[\Phi(x)]\, \psi(t)$, то все решения уравнения (1) продолжимы на полубесконечный интервал $[t_0, \infty)$; 2) если $x_1(t)$, $x_2(t)$ — два решения уравнения (1), удовлетворяющие одному и тому же начальному условию для всякого $\varepsilon > 0$ $\int_0^\varepsilon du / L(u) = \infty$, $\Phi(0) = 0$ и $(\Gamma_{j(x_1 - x_2)}(x_1 - x_2), f(x_1, t) - f(x_2, t)) \leqslant L[\Phi(x_1 - x_2)]\, \psi(t)$, то $x_1(t) \equiv x_2(t)$. Для систем обыкновенных дифференциальных уравнений из этих утверждений вытекают некоторые критерии, например критерий Винтнера (Wintner A., Amer. J. Math., 1945, 67, № 2, 417—430; 1946, 68, № 1, 173—178), продолжимости решений на полубесконечный интервал и критерии, например критерий Тонелли (Tonnelli L., Rend. R. Accad. naz. Lincei, 1925, 6, № 1, 272), единственности решений. Доказательства теорем отсутствуют.

Р. В. Петропавловская

3816 К. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. Мышкис А. Д. (Lineare Differentialgleichungen mit nacheilendem Argument. Myschkis A. D. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 181 S.) (нем.)

3817 К. Дифференциальные операторы и дифференциальные уравнения бесконечного порядка с постоянными коэффициентами. Исследования в связи с целыми функциями конечного порядка. Сиккема (Differential operators and differential equations of

infinite order with constant coefficients. Researches in connection with integral functions of finite order. Sikkema P. C., Groningen-Djakarta, P. Noordhoff N. V., 1953, 223 pp., 11.50 florins) (англ.)

Автор рассматривает дифференциальные операторы

$$F(D) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n D^n, \quad D = d/dz,$$

интересуясь двумя проблемами: применением $F(D)$ к данному классу целых функций (и характеристикой получающихся при этом функций) и существованием решений уравнения $F(D)y = h(z)$, где $h(z)$ — целая функция специального класса, автор проводит исследование более детально, чем другие, кто имел дело с этими проблемами, и получил более точные результаты. В частности, он рассматривает случаи, когда функция $F(z)$ не обязательно регулярна в 0, и не только определяет верхние границы для роста $F(D)y$, но также и нижние границы; он показывает не только, что $F(D)y = h$ имеет решение самое большее такого-то порядка роста, но что оно имеет решение в точности такого-то порядка роста (разностное уравнение $y(z+\omega) - y(z) = h(z)$ содержится здесь как специальный случай). Например, если $y(z)$ будет целой функцией самое большее первого порядка минимального типа, а $F(D)$ будет оператором (не тождественно равным нулю), применимым ко всякой целой функции, которая растет не быстрее $y(z)$, то тогда $y(z)$ трансформируется в функцию $h(z)$ того же самого порядка и типа. Обратно, если $h(z)$ — целая функция самое большее первого порядка минимального типа, то уравнение $F(D)y = h$ имеет решение того же порядка и типа.

Некоторые из результатов автора обобщают часть работы Уиттекера об асимптотических периодах: вместо рассмотрения чисел ω таких, что $(e^{\omega D} - 1)y$ имеет меньший рост, чем y, он рассматривает условия, при которых более общий оператор $F(D)y$ имеет меньший рост, чем y (для оператора $e^{\omega D} - 1$ это уже было сделано (Scott S., Proc. Cambridge Philos. Soc., 1935, 31, 543—554)). Основные методы автора состоят в использовании степенных рядов и бесконечных систем линейных уравнений.

R. P. Boas

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 623.

3818 Д. О классе задач на собственные значения с нелинейной параметрической зависимостью. Мюллер (Über eine Klasse von Eigenwertaufgaben mit nichtlinearer Parameterabhängigkeit. Müller H., Diss. Techn. H., Dresden, 1953, 29 Bl. Maschinenschr.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 19, 1596 (нем.)

3819 Д. Периодические колебания квазилинейных автономных систем со многими степенями свободы. Булгаков Н. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Уральский ун-т, Свердловск, 1955

3820 Д. О периодических решениях линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. Норкин С. Б. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, Вологда, 1955.

УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

3821. К вопросу почти периодичности решения линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка. Лисевич (До питання майже-періодичності розв'язку лінійного диференціального рівняння 2-го порядку в частинних похідних. Лісевич Л. М.), Доповіді та повідомлення Львівськ. ун-ту, 1955, № 5, ч. 2, 95—97 (укр.)

Приведены без доказательств условия существования почти периодического решения (в частности, квазипериодического, периодического) для однородного уравнения с постоянными действительными коэффициентами

$$A\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + 2D\frac{\partial U}{\partial x} + 2E\frac{\partial U}{\partial y} + FU = 0, \quad (1)$$

а также для соответствующего неоднородного уравнения с правой частью, являющейся почти периодической функцией x и y. Входящие в эти условия соотношения между коэффициентами уравнения (1) получены в результате исследования распределения действительных корней λ и μ уравнения

$$A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2 - 2iD\lambda - 2iE\mu - F = 0.$$

Имеются опечатки.

С. Н. Киро

3822. Решение некоторых систем уравнений с частными производными посредством включения в цикл. Лукомская М. А., Прикл. матем. и механика, 1955, 17, № 6, 745—747

Показывается, что система уравнений сыпучей среды

$$\cos\varphi\,\partial\sigma/\partial x + \sin\varphi\,\partial\sigma/\partial y +$$
$$+ 2\sigma(\cos\varphi\,\partial\varphi/\partial x + \sin\varphi\,\partial\varphi/\partial y) = 0,$$
$$\sin(\varphi+\rho)\,\partial\sigma/\partial x - \cos(\varphi+\rho)\,\partial\sigma/\partial y -$$
$$- 2\sigma\,\mathrm{tg}\,\rho\,(\sin(\varphi+\rho)\,\partial\varphi/\partial x - \cos(\varphi+\rho)\,\partial\varphi/\partial y) = 0,$$

где $\rho = \mathrm{const}$, может быть приведена к Σ-интегрируемому виду (Bers L. Gellart, Trans. Amer. Math. Soc., 1944, 56, № 1), включающемуся в цикл первого порядка (Петровский И. Г. Успехи матем. наук, 1946. 1, № 3—4). То же самое показывается в отношении системы уравнений длинных волн

$$\partial u/\partial t + u\partial u/\partial s = -gB^{-1}\,\partial F/\partial s,$$
$$\partial F/\partial t + \partial(uF)/\partial s = 0.$$

Доказывается также, что система p-аналитических функций (Положий Г. Н., Докл. АН СССР, 1947, 58, № 7; 1948, 60, № 5)

$$\partial u/\partial x = p^{-1}\,\partial u/\partial y,\ \partial u/\partial y = -p^{-1}\,\partial v/\partial x$$
$$(p = p(x, y) > 0)$$

представляется в виде Σ-интегрируемой системы, включающейся в цикл первого порядка, если характеристика $p = p(x, y)$ является гармонической функцией от x, y.

Г. Н. Положий

3823. Об одной нелинейной краевой задаче аналитических функций. Наталевич В. К., Науч. тр. Новочеркас. политехн. ин-та, 1955, 26, 455—459

Рассматривается задача: определить внутри единичного круга аналитическую функцию $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ так, чтобы ее вещественная и мнимая части на контуре удовлетворяли соотношению $au^3 + bv^3 + 3cu^2v + 3duv^2 = q$, где $a(s)$, $b(s)$, $c(s)$, d/s, $q(s)$ — функции, заданные на окружности и удовлетворяющие условию Гёльдера, $a^2(s) + b^2(s) = 1$. Исследуются только те случаи, в которых решение задачи приводится к задаче Дирихле.

Б. В. Хведелидзе

3824. Замечания об обобщенной задаче Дирихле. Каттабрига (Osservazioni sul problema generalizzato di Dirichlet. Cattabriga Lamberto), Rend. Seminar. mat. Univ. Padova, parte 1, 1955, 24, 45—52 (итал.)

Граница FD конечной трехмерной области D состоит из одной или нескольких поверхностей, каждая из которых допускает параметрическое представление $x = \overline{x}(r, s)$, $y = \overline{y}(r, s)$, $z = \overline{z}(r, s)$, в котором функции $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ непрерывно дифференцируемы в области T изменения параметров r и s, и выражение $EG - F^2$ строго положительно. Предполагается также, что

радиусы кривизны на каждой поверхности меняются непрерывно.

Пусть $u(x, y, z)$ определена в D, а $f(r, s)$ квадратично суммируема в T. Строится семейство поверхностей, зависящих от параметра t, $t \geqslant 0$, и определяемых уравнениями

$$x = \bar{x} + t\xi, \quad y = \bar{y} + t\eta, \quad z = \bar{z} + t\zeta, \tag{1}$$

где $\xi(r, s)$, $\eta(r, s)$, $\zeta(r, s)$ — направляющие косинусы внутренней нормали к FD. О функции u автор говорит, что она в среднем принимает на FD значение $f(r, s)$, если $(x, y, z$ определяются уравнениями (1))

$$\lim_{t \to 0} \int_T [u(x, y, z) - f(r, s)]^2 \, dr ds = 0.$$

Обобщенной задачей Дирихле автор называет задачу о нахождении гармонической в D функции, принимающей на FD в среднем заданное $f(r, s)$. Доказывается, что если f ограничена в T и непрерывна в некоторой точке $P_0 \in FD$, $u(P)$ — решение обобщенной задачи Дирихле и $P \to P_0$, то $u(P) \to f(P_0)$. С. Г. Михлин

3825. Неравенство Харнака для положительных гармонических функций. Хопф (Die Harnacksche Ungleichung für positive harmonische Funktionen. Hopf Eberhard), Math. Z., 1955, 63, № 2, 156—157 (нем.)

Пусть G — область в n-мерном евклидовом пространстве. Известно, что для фиксированной пары точек x и x', принадлежащих G, отношение $u(x')/u(x)$, где u — положительная гармоническая функция в G, ограничено константой, общей для всех положительных гармонических в G функций. Далее, для любой фиксированной точки $y \in G$ логарифмический градиент $u'(x)/u(x)$ также ограничен константой, общей для всех положительных гармонических в G функций.

Дается элементарное доказательство этих двух фактов. Доказываются неравенства: Пусть K — n-мерный шар с центром в начале координат радиуса R, u — функция положительная и гармоническая в K. Тогда 1) $u(x)/u(0) \leqslant [R/(R - |x|)]^n$, 2) $|u'(0)|/u(0) \leqslant n/R$. Доказательство просто получается из одной лишь теоремы о среднем. Неравенство 1) допускает некоторое улучшение без существенного усложнения доказательства. Е. М. Ландис

3826. О теореме единственности для уравнения теплопроводности. Ахиезер Н. И., Тр. Харьковск. политехн. ин-та, 1955, 5, 51—55

Рассматривается задача теплопроводности для ограниченного тела Ω. Температура $u(x, y, z, t)$ должна удовлетворять уравнению

$$\iiint_\omega c\rho \, (\partial u/\partial t) \, d\tau = -\iint_\sigma k \, (\partial u/\partial n) \, dS + \iiint_\Omega A d\tau \tag{1}$$

с начальными и краевыми условиями

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \quad k\partial u/\partial n - h(u - U)|_\Sigma = 0, \tag{2}$$

где ω — любая область Ω, σ — граница ω, Σ — граница Ω, n — внутренняя нормаль, k — коэффициент внутренней теплопроводности, c — теплоемкость, ρ — плотность, $A(x, y, z, t)$ — интенсивность (на единицу объема) тепловых источников, $h > 0$ — коэффициент теплоотдачи, U — температура внешней среды на поверхности тела.

В предположении, что $k(x, y, z)$ удовлетворяет условию Липшица по x, y и z, а остальные функции непрерывны, при помощи принципа максимума доказывается единственность решения (1), (2) в классе непрерывно дифференцируемых функций.

Примечание референта: Отметим, что утверждение на стр. 52 (7 строка снизу) формально неверно, но допускает уточнение. Л. И. Камынин

3827. Формы и поля излучения. Мюллер (Radiation patterns and radiation fields. Müller Claus), J. Rational. Mech. and Analysis, 1955, 4, № 2, 235—246 (англ.)

В области $|x| \geqslant C > 0$ трехмерного пространства ($C = \text{const}$) рассматривается функция $U(x)$, удовлетворяющая: α) уравнению $\Delta U + k^2 U = 0$, ($k = \text{const} > 0$); β) принципу излучения в форме Зоммерфельда: $U(x) = O(|x|^{-1})$, $\lim_{|x| \to \infty} |x| (\partial U/\partial |x| - ikU) = 0$. Функция $f(\xi)$, определенная на единичной сфере $|\xi| = 1$, названа формой излучения функции $U(x)$, если при $R \to \infty$ имеет место равенство

$$U(R\xi) = e^{ikR} R^{-1} f(\xi) + O(R^{-2}).$$

Доказываются теоремы: а) Если U удовлетворяет α) и β), то существует такая гармоническая во всем пространстве функция $H(x)$, что $H(\xi)$ есть форма излучения для $U(x)$ и

$$\int_{|x|=R} |H(x)|^2 \, dS = O(e^{2k(C+\varepsilon)R}) \tag{1}$$

при $R \to \infty$ и любом $\varepsilon > 0$. б) Если $H(x)$ гармоническая во всем пространстве и $k > 0$, $C > 0$ — такие постоянные, что для любого $\varepsilon > 0$ имеет место (1), то существует в области $|x| > C$ единственная функция $U(x)$, удовлетворяющая α) и β) и имеющая $H(\xi)$ своей формой излучения. Х. Л. Смолицкий

3828. Об уравнениях движения нелинейно-упругой среды. Бабич В. М., Докл. АН СССР, 1954, 97, № 1, 41—44

См. РЖМех, 1955, 2605.

3829. К теории плоской неустановившейся фильтрации грунтовых вод. Соколов Ю. Д., Укр. матем. ж., 1954, 6, № 2, 218—232

См. РЖМех, 1955, 1432.

3830. Бигармонические колебания диссипативной нелинейной системы, вызываемые или поддерживаемые гармонической возмущающей силой. Кац А. М., Прикл. матем. и механика, 1954, 18, № 4, 425—444.

См. РЖМех, 1955, 2845

3831. Собственные и вынужденные колебания системы бурового привода с гидромуфтой и его характеристика. Азимов Б. А., Тр. Азерб. н.-и. ин-та по добыче нефти, 1954, № 1, 61—79

См. РЖМех, 1955, 2851.

3832 К. Нелинейные колебания. Граффи (Oscillazioni non lineari. Graffi Dario, Bari, G. Laterza e F., 1954, 18 p., 500 L.), Bibliogr. ital., 1955, 89, № 645—646, 54 (итал.)

3833 К. К теории дифференциальных уравнений в частных производных. Берс (Contributions to theory of partial differential equations. Ed. Bers L. and others. Ann. math. studies, № 33. Princeton N. J., Princeton Univ. Press; London, Oxford Univ. Press, 1954, vii + 264 pp., ill., 32 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 281, 9 (англ.)

3834 Д. К вопросу о сходимости алгорифмов типа Шварца. Калик К. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., ЛГУ, Л., 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ К ФИЗИКЕ, ТЕХНИКЕ И ЕСТЕСТВЕННЫМ НАУКАМ

3835. Замечания о коэффициенте динамической нагрузки в простых линейных системах без затухания. Сейлман (Some notes on the dynamic load factor in simple undamped linear systems. Saelman B.), Amer. J. Phys., 1954, 22, № 8, 563—567 (англ.)

См. РЖМех, 1955, 4131.

3836. Точные решения уравнений одномерных неустановившихся движений газа с учетом сил ньюто-

новского трения. Лидов М. Л., Докл. АН СССР, 1954, **97**, № 3, 409—410
См. РЖМех, 1955, 2277.

3837. Исследования по синхронизации. Шалеа (Recherches sur la synchronisation. Chaléat Raymond), Ann. franç. chronom., 1954, 8, № 3, 167—234 (франц., рез. нем.)
См. РЖМех, 1955, 3501.

3838. О субгармоническом резонансе. Уно (On subharmonic resonance. Uno Toshio), Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1952, Sci. Council Japan, Tokio, 1953, 307—308 (англ.)
См. РЖМех, 1955, 1174.

3839. Математический анализ последовательного контура с нелинейной емкостью. Пайпс (A mathematical analysis of a series circuit containing a nonlinear capacitor. Pipes Louis A.), Trans. Amer. Inst. Electr. Engrs, 1953, **72**, part 1, 238—244 (англ.)
См. РЖФиз, 1955, 9655.

3840. К теории синхронизации автоколебаний на обертонах. Хохлов Р. В., Вестн. Моск. ун-та, 1954, № 8, 51—64
См. РЖМех, 1955, 4125.

3841. Оптимальные схемы замещения и модели линейных динамических систем. Куликовский (Optymalne schematy zastępcze i modele liniowych układów dynamicznych. Kulikowski R.), Arch. elektrotechniki, 1955, **4**, № 1, 17—34 (польск.; рез. русс., англ.)

Задача о выборе оптимальной схемы замещения, дающей наименьшую погрешность в рассматриваемом интервале времени, исследуется разложением действующих на вход системы сигналов на элементарные при помощи оператора Фредгольма с симметричным ядром. Таким образом как входной сигнал, так и выходные сигналы заданной системы и системы замещения представляются точками конечного или бесконечного пространства элементарных сигналов. Эта задача сводится тогда к следующей: На некотором интервале времени T заданы две функции $U(t)$ и $U_0(t, A_j)$ переменной t, причем U_0 зависит еще от некоторого числа параметров A_j ($j = 1, 2, \ldots, n$). Параметры A_j должны быть выбраны так, чтобы отклонение на интервале T функции U от U_0 было в метрике данного функционального пространства минимальным возможным. Указывается, что при выборе метрики функционального пространства надо учитывать характер возникающих в системе искажений. Для систем, в которых основное значение имеет искажение формы сигнала, рекомендуется приближение в метрике пространства C, а для систем, находящихся под воздействием стохастических сил, где важен интегральный результат искажений, рекомендуется метрика L^2.

В качестве примера рассматривается схема замещения простейшего усилителя, выбираемая с использованием метрики C и L^2. В случае бесконечного промежутка приближения в пространстве с метрикой L^2 задача сводится к интерполяции функции $U(p) = \int_0^\infty u l^{-pt} dt$ при помощи $U_0 = \int_0^\infty u_0(t)\, l^{-pt} dt$ в заданных узлах интерполяции $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Этот случай поясняется примером, заимствованным из теории автоматического регулирования объекта с распределенными параметрами (регулирование температуры в печи).
М. А. Айзерман

3842. Четыре метода для анализа цепей, переменных во времени. Пайпс (Four methods for the analysis of time-variable circuits. Pipes L. A.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 1, 4—12 (англ.)

Рассматриваются четыре известных метода для исследования дифференциальных уравнений, описывающих процессы в линейных электрических цепях с переменными во времени параметрами.

1. Классический метод применим, если дифференциальное уравнение, описывающее процесс в цепи, является уравнением первого порядка. В рассмотренном примере для гармонического анализа полученного решения применяется известное разложение в ряд Фурье, коэффициенты которого выражаются при помощи бесселевых функций чисто мнимого аргумента.

2. Матричный метод, как известно, применим, если дифференциальное уравнение можно преобразовать в уравнение вида Матье-Хилла

$$d^2x/dt^2 + F(t)\,x = 0, \qquad (1)$$

где $F(t)$ — данная периодическая функция времени t, и если общее решение уравнения (1) полностью найдено в промежутке одного периода $0 \leqslant t \leqslant T$.

3. Так называемый приближенный метод Бриллуина—Венцеля—Крамера применим в случае, если входящий в дифференциальное уравнение переменный параметр имеет лишь малые отклонения около своего среднего значения. Пусть уравнение приведено к виду

$$d^2y/dt^2 + G^2(t)\,y = 0, \qquad (2)$$

где $G^2(t)$ является переменным параметром уравнения, имеющим малые отклонения. Со ссылкой на более ранние работы (Brillouin L., Quart. Appl. Math., 1948, **6**, July, 167—178 и др.) утверждается без доказательства, что приближенное выражение общего решения уравнения (2) можно представить в виде

$$y(t) = [G(t)]^{-1/2}\,(A\cos[\varphi(t)] + B\sin[\varphi(t)],$$

где A и B — произвольные постоянные, а $\varphi(t)$ имеет вид

$$\varphi(t) = \int G(t)\,dt.$$

Условием применимости метода является неравенство

$$G^2(t) \gg |\,G''/2G - 3\,(G'/2G)^2\,|.$$

Для решения соответствующего неоднородного дифференциального уравнения применяется метод вариации произвольных постоянных. Указано, что рассмотренным здесь методом пользуются в квантовой механике.

4. Применение в обычном виде преобразования Лапласа для решения дифференциального уравнения, содержащего переменный параметр, приводит к интегральному уравнению типа Вольтерра второго рода, решение которого получается методом итераций.

Изложенные методы пояснены многочисленными примерами из теории электрических цепей, соответствующими переменным сопротивлению, емкости или индуктивности.
Н. А. Бразма

3843. Математический анализ цепи последовательного соединения, содержащей периодически изменяющееся сопротивление. Пайпс (A mathematical analysis of a series circuit containing periodically varying resistance. Pipes L. A.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 1, 67—72 (англ.)

Рассматривается неоднородное дифференциальное уравнение электрической цепи, содержащей последовательно соединенные постоянные индуктивность и емкость и периодически изменяющееся сопротивление:

$$Ld^2q/dt^2 + R\,[1 + k\cos(\theta t)]\,dq/dt + q/C = E(t) \quad (k^2 \ll 1). \qquad (1)$$

Для решения уравнения (1) применяется приближенный метод Бриллуина — Венцеля — Крамера (реф. 3842). Конкретнее исследуются случаи постоянной и синусоидальной электродвижущих сил.

Исходя из энергетических соображений, автор рассматривает возможности возбуждения колебаний в це-

пи, описываемой однородным уравнением

$$Ld^2q/dt^2 + [R_0 + R\cos(\theta t)]\, dq/dt + q/C = 0\,(R > R_0).$$

Такие «параметрические» колебания (см., например, Стрелков С. П., Введение в теорию колебаний, М.—Л., Гостехиздат, 1950, 12) возбуждаются за счет энергии, получаемой цепью от механизма, вызывающего изменения сопротивления цепи. Эффективное решение дифференциального уравнения, описывающего эти колебания, рассматривается методом преобразования Лапласа с последующим решением интегрального уравнения типа Вольтерра (реф. 3842). Н. А. Бразма

3844. Замечание к статье Пайпса «Математический анализ цепи последовательного соединения, содержащей периодически изменяющееся сопротивление». Роббинс (Comment on the paper «A mathematical analysis of a series circuit containing periodically varying resistance» by L. A. Pipes. Robbins H.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 1, 72—73 (англ.)

Приводятся рассуждения о некоторых случаях неприменимости приближенного метода Брилуина — Венцеля — Крамера (реф. 3842, 3843) для решения линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменным параметром. Сделано заключение, что данный метод может оказаться неприменимым, когда искомое решение уравнения строится в виде наложения бесконечного множества частных решений, полученных этим методом. Разъясняется причина неприменимости данного метода для решения дифференциального уравнения (2) реферата 3843.

Н. А. Бразма

3845. Явления резонанса в цепях, переменных во времени. Херреро (Resonance phenomena in time-varying circuits. Herrero M. C.), IRE Trans. Circuit Theory, 1955, CT-2, № 1, 35—41 (англ.)

Рассматривается уравнение электрической цепи, содержащей параллельно соединенные постоянные емкость и сопротивление и периодически изменяющуюся индуктивность:

$$C\, de/dt + e/R + L^{-1}(1 + m\sin\omega t)\int e\, dt = i.$$

Применяются передаточная функция линейной переменной во времени системы (РЖМат, 1956, 3128) и импульсная характеристика такой системы, называемая здесь функцией Грина. Задача построения передаточной функции приводит к неоднородному дифференциальному уравнению типа Матье

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (a + 2q\sin 2x)\, y = f(x),$$

качественное исследование которого производится в плоскости переменных a, q. При этом рассматриваются области устойчивости и неустойчивости. Указывается также возможность возбуждения параметрических колебаний (реф. 3843). Перечислены многие приложения рассмотренной здесь задачи к физике и технике.

Н. А. Бразма

3846. Гармоническое искажение в схемах, работающих по степенному закону. Кауфман (Harmonic distortion in power-law devices. Kaufman H.), Math. Mag., 1955, 28, № 5, 245—250 (англ.)

Пусть X и Y — величины, характеризующие процесс на входе и, соответственно, выходе схемы. Рассматривается схема, работающая по закону

$$Y(X; X_0) = \begin{cases} (X - X_0)^v & \text{при } X > X_0, \\ 0 & \text{при } X \leqslant X_0, \end{cases}$$

где v — неотрицательное действительное число. Выходной процесс, соответствующий входному процессу $x(t) = P\cos(pt + \theta_p)$, представляется в виде ряда Фурье

$$y(t) = \frac{1}{2}C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} C_m \cos(mpt + m\theta_p),$$

коэффициенты которого выражаются формулами:

$$C_m = P^v A_m^{(v)},\ A_m^{(v)} = (1/\pi)\int (\cos u - h)^v \cos mu\, du, \quad (1)$$
$$[h = X_0/P,\ m = 0, 1, 2, \ldots,$$

а пределы интегрирования зависят от того, который из случаев $h \geqslant 1$, $-1 \leqslant h < 1$ или $h \leqslant -1$ имеет место.

Указываются явные выражения коэффициентов $A_m^{(v)}$ через гипергеометрическую функцию, гамма-функцию и присоединенные функции Лежандра, что известно из работ других авторов. Далее рассматриваются некоторые рекуррентные соотношения между коэффициентами $A_m^{(v)}$.

Н. А. Бразма

3847. О корреляционной функции в модели турбулентности Бюргерса. Хайман (On the correlation function in Burgers' model of turbulence. Hyman M. A.), Appl. Scient. Res., 1954, A4, № 5—6, 361—373 (англ.)

См. РЖМех, 1955, 4365.

3848. Заметка о теории массового поведения. Хирон (Note on the theory of mass behavior. Heairon John Z.), Bull. Math. Biophys., 1955, 17, № 1, 7—13 (англ.)

Рассматривается уравнение

$$dF/dt = (1 - F)\,[x(t) + bF], \quad (1)$$

полученное Рапопортом (Rapoport A., Bull. Math. Biophys., 1952, 14, 159—169). F — часть населения, которая подчиняется данному акту, $x(t)$ — внешнее воздействие. В (1) предполагается, что константа $b \geqslant 0$. Уравнение (1) является уравнением типа Рикатти, причем $F_1(t) \equiv 1$ — его частное решение. Общее решение (1) записывается в виде:

$$F(t) = 1 - e^{-u(t)}\,[K - \psi(t)]^{-1}, \quad (2)$$

где $u(t) = bt + \int_0^t x(\xi)\, d\xi$, $\psi(t) = b\int_0^t e^{-u(\xi)} d\xi$,

$K = [1 - F(0)]^{-1}$.

Из (2) выводятся общие свойства решения. В случае $x(t) = at$, $b \neq 0$ решение выражается через элементарные и табулируемые функции.

М. И. Грабарь

3849. Прохождение через резонанс в нелинейной системе с двумя степенями свободы. Рубаник В. П., Студ. наук. праці Київськ. ун-ту, 1955, зб. 16, 107—117

Рассматривается система дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{aligned} a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 + c_{11}q_1 + c_{12}q_2 &= \\ = \varepsilon Q_1(\tau, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \theta_1, \ldots, \theta_N), & \\ a_{21}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + c_{21}q_1 + c_{22}q_2 &= \\ = \varepsilon Q_2(\tau, q_1, q_2, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \theta_1, \ldots, \theta_N), & \end{aligned} \quad (1)$$

где ε — малый параметр, $\tau = \varepsilon t$, $d\theta_k/dt = \nu_k(\tau)$, N — небольшое натуральное число, Q_1 и Q_2 аналитические по q, $\dot{q}$ и представляются конечными тригонометрическими полиномами относительно $\theta_1, \ldots, \theta_N$. Для системы (1) строится приближенное решение асимптотическим методом Крылова—Боголюбова.

Рассмотрен частный случай, когда

$$\varepsilon Q_1 = -b_{11}\dot{q}_1 - b_{12}\dot{q}_2 + c_2 q_1^3 + \sum_{k=1}^{N} M_k \nu_k^2(\tau)\cos\theta_k,$$

$$\varepsilon Q_2 = -b_{21}\dot{q}_1 - b_{22}\dot{q}_2 + c_2 h q_2^3 + \sum_{k=1}^{N} M_k \nu_k^2(\tau)\cos\theta_k. \qquad (2)$$

При $N=3$ построены как стационарные резонансные кривые, так и кривые, характеризующие нестационарный режим при последовательном прохождении частот внешних гармоник через резонансные значения.

Ю. А. Митропольский

3850. О нелинейных уравнениях колебаний с запаздыванием. Симидзу (On differential equations for oscillations with after effect and non linearity. Shimizu Tatsujiro), Proc. 2nd Japan Nat. Congr. Appl. Mech., 1952, Sci. Council Japan, Tokio, 1953, 305—306 (англ.)

См. РЖМех, 1955, № 3, 1175

3851. О двухмерной многослойной задаче теплопроводности. Дацев А. Б., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 5, 813—816

Находятся решения $u_i(x, y, t)$ $(i=1, 2)$ уравнений

$$a_i^2 \Delta u_i = \partial u_i/\partial t, \quad (x, y) \in R_i, \qquad (1)$$

при начальных условиях

$$u_i(x, y, 0) = \Phi_i(x, y), \quad (x, y) \in R_i, \qquad (2)$$

и краевых условиях

$$u_1(x, y, t) = u_2(x, y, t), \quad (x, y) \in l, \qquad (3)$$

$$k_1 \partial u_1/\partial \nu = k_2 \partial u_2/\partial \nu, \quad (x, y) \in l, \qquad (4)$$

где R_2 — простая область, ограниченная гладким контуром l, R_1 — внешняя к l бесконечная двухсвязная область, ν — внутренняя нормаль.

$\Phi_i(x, y)$ — ограниченные интегрируемые функции в R_i. Задача решается последовательным сведением к интегральным уравнениям. Если на l задана $u_2(s, t)$ (s — длина дуги на l), то решение задачи (1) — (2) для u_2 имеет вид

$$u_2(x, y, t) = V_2(x, y, t) + W_2(x, y, t), \qquad (5)$$

$$V_2 = \frac{1}{4\pi a_2^2 t}\iint_{R_2} \Phi_2(\xi, \eta)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}{4a_2^2 t}\right] d\xi\, d\eta,$$

$$W_2 = \int_0^t d\tau \int_l \mu_2(\sigma, \tau)\frac{\exp\left[-r_2^2/4a_2^2(t-\tau)\right] r_2 \cos(r_2, \nu)}{4a_2^2(t-\tau)^2} d\sigma,$$

где $r_2 = M_0 M_2$, $M_0 \in l$, $M_2 \in R_2$, а плотность двойного теплового слоя $\mu_2(s, t)$ удовлетворяет уравнению

$$\int_0^t d\tau \int_l \frac{\mu_2(\sigma, \tau)\exp\left[-r_2^2/4a_2^2(t-\tau)\right] r_2 \cos(r_2 \nu)}{4a_2^2(t-\tau)^2} d\sigma +$$

$$+ \mu_2(s, t) = f(s, t) + V_2(s, t),$$

решение которого находится методом последовательных приближений. Подставляя найденное решение $\mu_2(\sigma, t)$ в (5), выражают u_2 через f (аналогично выражается и u_1 через f). Для нахождения f используют краевое условие (4) (условие (3) выполняется само собой), которое предварительно интегрируют по t от 0 до t. Получается интегральное уравнение вида

$$\int_0^T d\tau \int_l f(\sigma, \tau) E(s, \sigma, T, \tau) d\sigma +$$

$$+ \int_0^T d\tau \int_l f(\sigma, \tau) N(s, \sigma, t, \tau) d\sigma = M(s, T), \qquad (6)$$

где E, N и M — известные функции. Умножая (6) на $\sqrt{T_0 - T}\, dT$, интегрируя по T, дифференцируя по T_0, после некоторых преобразований получают для определения $f(s, t)$ интегральное уравнение вида (6). Указано несколько обобщений разобранной двухслойной двухмерной задачи теплопроводности. Л. И. Камынин

3852. О трехмерной многослойной задаче теплопроводности. Дацев А. Б., Докл. АН СССР, 1955, 101, № 6, 1019—1022

Решается трехмерная двухслойная задача теплопроводности аналогично тому, как решена двумерная многослойная задача теплопроводности (реф. 3851).

Л. И. Камынин

3853. Представление биволнового вектора потенциалами двойного запаздывания. Аржаных И. С., Докл. АН УзССР, 1955, № 8, 3—7 (рез. узб.)

Пусть S — замкнутая поверхность в трехмерном пространстве, $\lambda'(s,t)$ и $\lambda''(s, t)$ — две произвольные функции t и точки $s \in S$; $\sigma(s, t)$ — произвольный вектор. Тогда вектор

$$\mathbf{v}(x, t) = \int_S \{\lambda' \underset{\{\alpha\beta\}}{L_t^{xs}}(\sigma) + \lambda'' \underset{\{\beta\alpha\}}{L_t^{xs}}(\sigma)\}\, dS$$

назван потенциалом простого слоя с плотностью σ. Здесь L_t^{xs} означают операторы запаздывания, введенные автором ранее (РЖМат, 1956, 2264). Утверждается, что вектор $\mathbf{v}(x, t)$ непрерывен во всем пространстве, удовлетворяет в областях вне и внутри S биволновому уравнению

$$ab\mathbf{v} \equiv \left(\nabla^2 - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\nabla^2 - \frac{1}{\beta}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\mathbf{v} = 0$$

(α, β — постоянные), стремится к нулю не медленнее r^{-1} при $r \to \infty$ и его первые производные по координатам x_i $(i=1, 2, 3)$ имеют при переходе через S разрывы первого рода. Вводятся также потенциалы двойного слоя, имеющие при переходе через S разрывы первого рода, стремящиеся к нулю не медленнее r^{-2} при $r \to \infty$ и удовлетворяющие биволновому уравнению внутри и вне S.

Кроме того, даны интегральные представления любого вектора $\mathbf{u}(x, t)$, имеющего непрерывные производные четвертого порядка, через $ab\mathbf{u}$ и значения $\mathbf{u}$ и его производных на S.

Х. Л. Смолицкий

3854. Об одном методе расчета призматических оболочек. Векуа И. Н., Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1955, 21, 191—259

Предлагается новый метод расчета призматических оболочек при помощи разложения в ряды по полиномам Лежандра компонент вектора упругого перемещения тензора напряжений и тензора деформаций, рассматриваемых как функции координаты x_3, измеряющей толщину оболочки $(h^-(x_1, x_2) \leqslant x_3 \leqslant h^+(x_1, x_2))$. Никаких специальных гипотез о характере деформации оболочки автор не делает и тем самым устраняет ту неопределенность в постановке задачи, которая характерна для других методов расчета, например в теории Кирхгофа—Лява.

Компоненты вектора перемещения представляются формулами

$$u_i \cong \sum_{n=0}^{N} a\left(n + \frac{1}{2}\right) \overset{n}{u}_i P_n(ax_3 - b),$$

$$a = \frac{2}{h^+ - h^-}, \quad b = \frac{h^+ + h^-}{h^+ - h^-},$$

$$\overset{n}{u}_i(t, x_1, x_2) = \int_{h^-}^{h^+} u_i(t, x_1, x_2, z) P_n(az - b)\, dz$$

и ставится задача определения «моментов» $\overset{n}{u}_i(t, x_1, x_2)$. Для компонент тензоров напряжений и деформаций вводятся аналогичные разложения и такие же формулы для определения их моментов. Для составления дифференциальных уравнений, определяющих функции $\overset{n}{u}_i$, выводятся формулы, связывающие эти функции с моментами компонент тензора деформации, а затем на основании закона Гука устанавливаются формулы для моментов компонент тензора напряжений. После этого из общих уравнений теории упругости выводятся дифференциальные уравнения для $\overset{n}{u}_i$. Основная система уравнений имеет вид:

$$\mu \Delta \overset{r}{u}_i + (\lambda + \mu)\, \partial \overset{r}{E}/\partial x_i + \overset{r}{M}_i(\overset{p}{u}_j) + \overset{r}{X}_i = \rho \partial^2 \overset{r}{u}_i/\partial t^2,$$
$$r = 0, \ldots, N,$$

где $\overset{r}{E}$ — момент объемного расширения $(\partial \overset{r}{u}_1/\partial x_1 + \partial \overset{r}{u}_2/\partial x_2)$, $\overset{r}{M}_i$ — линейные операторы дифференцирования по координатам x_1 и x_2, $\overset{r}{X}_i$ — моменты массовых сил. Выводится также второй вариант основных уравнений, определяющих линейные комбинации моментов $\overset{r}{u}_i$. Установлены граничные условия для основных задач теории оболочек. Доказаны теоремы единственности и существования решений для любого конечного N, из метода доказательства теоремы существования следует практический способ решения поставленных задач (решение системы интегральных уравнений методом последовательных приближений). Автор отмечает, что в связи с малой толщиной оболочки практически достаточно в разложении вектора перемещения по полиномам Лежандра ограничиться небольшим числом слагаемых, например считать $N = 0$ или $N = 1$. В гл. 2 рассматривается приближение порядка $N = 0$. Основная система состоит из трех уравнений, первые два уравнения определяют $\overset{\circ}{u}_1$ и $\overset{\circ}{u}_2$, а третье определяет $\overset{\circ}{u}_3$. Для пластинки постоянной толщины полученные уравнения совпадают с уравнениями плоской задачи теории упругости. Для статических задач теории оболочек вводится функция напряжений и устанавливается уравнение четвертого порядка эллиптического типа, а также граничные условия для ее определения. Подробно рассмотрены оболочки вращения. В гл. 3 изучается приближение порядка $N = 1$. Выведены условия совместности и установлены функции напряжений (два скаляра и две ковариантные компоненты вектора). Получена система четырех уравнений для определения этих функций. Подробно рассмотрены симметрические ($h^+ + h^- = 0$) призматические оболочки. Для пластинки постоянной толщины построены формулы общих решений при помощи комплексного переменного. Рассмотрены некоторые примеры, для которых вычисления проделаны до конца. Заключительные замечания посвящены сравнению теории автора с другими методами, основанными на гипотезе Кирхгофа.

И. С. Аржаных

3855. О регулярности бесконечной системы уравнений в задаче изгиба круглого призматического бруса эллиптической полостью. Аменздаде Ю. А., Докл. АН АзССР, 1955, **11**, № 3, 155—160 (резюме азерб.)

В предыдущих работах автора (Докл. АН АзССР, 1954, **1**, № 6, 2; Инженерный сб., 1955, 21) задача изгиба круглого призматического бруса с эллиптической полостью под действием поперечной сосредоточенной силы приведена к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. В реферируемой работе устанавливается, что эта система алгебраических уравнений вполне регулярна для достаточно близких друг к другу границ области. В. С. Жгенти

3856. О взаимодействии движущихся масс. Мелоне (Sulla interazione di masse in movimento. Melone S.), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 1, 68—74 (итал.)

Основываясь на аналогии уравнений для статического гравитационного и электростатического полей, автор вводит «кинематическое» поле, которое порождается движущейся массой и аналогично магнитному полю, порождаемому движущимся электрическим зарядом. При помощи обобщения статических уравнений для гравитационного поля на нестационарный случай формулируются уравнения для гравитационно-кинематического поля, формально совпадающие с уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{K} = 4\pi f \mu \mathbf{v} - \partial \mathbf{G}/\partial t, \ \operatorname{div} \mathbf{G} = -4\pi f \mu,$$
$$\operatorname{rot} \mathbf{G} = h\, \partial \mathbf{K}/\partial t, \ \operatorname{div} \mathbf{K} = 0,$$

где $\mathbf{K}$ — кинематическое, а $\mathbf{G}$ — гравитационное поле. Коэффициент h определяется из условия инвариантности уравнений относительно группы преобразований Лоренца и равен $1/c^2$. Таким образом, на движущуюся массу действует сила с плотностью

$$\mathbf{L} = \rho \left\{ \mathbf{G} - \left[\frac{\mathbf{U}}{C^2} \mathbf{K} \right] \right\},$$

аналогичная силе Лоренца. Взаимодействие масс по закону Ньютона оказывается чисто статическим.

П. П. Бирюлин

3857. Мультиполи и несимметричные волны Щелкунова. Феррари (Multipoli e onde di Schelkunoff dissimmetriche. Ferrari Italo), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, № 3, 304—308 (итал.)

В предыдущей работе автора (РЖМат, 1955, 5852) было показано, что магнитное поле $\mathbf{H}_n$ симметричных собственных волн в сферической системе координат может быть представлено в виде линейной комбинации магнитных полей осевых мультиполей всех порядков до n-го включительно. В настоящей работе показывается, что магнитное поле несимметричной волны порядка n с азимутальным собственным числом, равным 1, может быть представлено в виде линейной комбинации магнитных полей мультиполей, помещенных в начало координат, но имеющих различные направления. Разложение дается в виде

$$\mathbf{H}_n = \sum_{p=0}^{n} a_p \mathbf{H}_p^1,$$

где $\mathbf{H}_p^1$ — магнитное поле «группы» мультиполей,

$$\mathbf{H}_p^1 = \partial^p \mathbf{H}_x/\partial z^p + p \partial^p \mathbf{H}_z/\partial x\, \partial z^{p-1},$$

а $\mathbf{H}_x$ и $\mathbf{H}_z$ — магнитные поля диполей, направленных соответственно по осям x и z. П. П. Бирюлин

3858. Математический анализ упрощенной модели реакции срыва. Йост (Mathematical analysis of a simple model for the stripping reaction. Jost R e s), Z. angew. Math. and Phys., 1955, **6**, № 4, 316—326 (англ.; рез. нем.)

Изучается волновая функция $\psi(\xi, \eta)$, удовлетворяющая уравнению Шредингера
$\partial^2\psi/\partial\xi^2 + \partial^2\psi/\partial\eta^2 + \lambda[\theta(\xi)\delta(\eta) + \theta(\eta)\delta(\xi)]\psi + E\psi = 0$,
$\theta(\xi) = 1$ при $\xi > 0$, $\theta(\xi) = 0$ при $\xi < 0$, $\lambda > 0$.

Задача сводится к исследованию интегрального уравнения

$$\psi(\xi, \eta) = (\lambda i/4)\int_0^\infty K(\xi, \xi', \eta)\Phi(\xi')\,d\xi', \qquad (1)$$

$$K(\xi, \xi', \eta) = H_0^{(1)}(\sqrt{E}\sqrt{(\xi-\xi')^2+\eta^2}\,) -$$
$$- H_0^{(1)}(\sqrt{E}\sqrt{\xi^2+(\eta-\xi')^2}\,),$$

где $\Phi(\xi)=\psi(\xi',0)$, а $H_0^{(1)}$ — ганкелевская функция. При $\eta = 0$ (1) переходит в однородное интегральное уравнение для $\Phi(\xi)$, к решению которого применяется известный метод Винера и Хопфа. Вводятся функции $\varphi(p)$ и $\psi(p)$:

$$\varphi(p) = \int_0^\infty e^{ip\xi}\Phi(\xi)\,d\xi, \quad \psi(p) = -\int_{-\infty}^0 e^{ip\xi}\Phi(\xi)\,d\xi$$

и показывается, что при помощи преобразования Фурье задача приводится к решению функционального уравнения

$$\varphi(p-\psi(p) = (\lambda i/2\omega)[\varphi(p) - \varphi(\omega)], \qquad (2)$$

где $\omega(p) = \sqrt{E-p^2}$, $\operatorname{Im}\omega > 0$. Уравнение (2) сводится в свою очередь к исследованию разностного уравнения

$$h(Z+1) + h(Z-1) = \zeta(Z)\,h(Z),\ \zeta(Z+4) = \zeta(Z).$$

Изучается аналитический характер решения этого разностного уравнения и в заключение приводится пример на построение явного решения в одном частном случае.

Н. С. Кошляков

См. также: 3573, 3772, 3782, 3785, 3880 К, 3924, 3925, 4084, 4085, 4086, 4087, 4088, 4089, 4090, 4091, 4092, 4095, 4097.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

3859. О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме. Гахов Ф. Д., Чибрикова Л. И., Матем. сб., 1954, 35(77), № 3, 395—436

Ядра решаемых в работе интегральных уравнений можно разбить на два класса:

1. Остающиеся инвариантными относительно некоторой группы линейных преобразований.

2. Принимающие при таком преобразовании некоторые множители.

Простейшим уравнением 1-го класса является следующее:

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\tau-t} + \frac{1}{\tau-\omega_1(t)} + \dots\right.$$
$$\left. \dots + \frac{1}{\tau-\omega_{n-1}(t)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau = f(t). \qquad (1)$$

Здесь a, b, f — заданные функции, удовлетворяющие условию Гёльдера, $\omega_0(t) \equiv t$, $\omega_1(t), \dots, \omega_{n-1}(t)$ — дробно-линейные функции, составляющие группу, L_0 — контур, который может состоять из конечного числа простых гладких замкнутых или разомкнутых кривых, могущих пересекаться в конечном числе точек.

Вводится кусочно-голоморфная автоморфная функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_0}\left[\frac{1}{\tau-z} + \frac{1}{\tau-\omega_1(z)} + \dots\right.$$
$$\left. \dots + \frac{1}{\tau-\omega_{n-1}(z)}\right]\varphi(\tau)\,d\tau, \qquad (2)$$

имеющая линиями разрыва контур L_0 и все контуры $L_k (k = 1,2, \dots, n-1)$, в которые отображается контур L_0 преобразованиями группы. При помощи этой функции решение интегрального уравнения (1) приводится к решению граничной задачи вида

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \qquad (3)$$

на контуре $L = L_0 + L_1 + \dots + L_{n-1}$ при дополнительном условии, что решение должно иметь интегральное представление вида (2).

Дается общее решение задачи (3) в замкнутой форме, откуда решение исходного уравнения (1) получается по формуле

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t).$$

Ко второму классу принадлежат два типа уравнений

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\sum_{k=0}^{n-1} p_k(t)\int_{L_0}\frac{\varphi(t)}{\tau-\omega_k(t)}\,d\tau = f(t), \qquad (4)$$

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\sum_{k=0}^{2n-1}(-1)^k\int_{L_0}\frac{\varphi(\tau)}{\omega_k(\tau)-t}\,d\tau = f(t), \qquad (5)$$

где a, b, f, L_0, ω_k — означают то же, что и для уравнения (1), а $p_k(t)$ — рациональные функции, выражающиеся через одну из них $p_1(t)$ по формулам

$$p_k(t) = \prod_{j=1}^{k-1} p_1[\omega_j(t)],$$

причем $p_1(t)$ удовлетворяет соотношению

$$\prod_{k=1}^{n-1} p_1[\omega_k(t)] = 1.$$

Уравнения (4), (5) решаются методом, сходным с тем, который применяется при решении уравнения (1).

Примечание референта. 1. В случае, когда функция (2) не удовлетворяет условию $\Phi(\infty) = 0$, число линейно независимых решений будет на единицу меньше, чем указанное в работе.

2. Утверждение, что если $\omega_1(t)$ переводит контур L_0 в L_1 с изменением направления, то все контуры L_k с четным индексом будут сохранять направление обхода, а с нечетным индексом менять его на обратное, вообще, неправильно.

3. В статье сказано, что если преобразования группы являются целыми, то при подсчете числа решений величину $\varkappa$ надо заменить через $n\varkappa$. Это неверно. Перечисленные погрешности легко исправимы.

Авторы отметили следующие дефекты: 1) Существенная опечатка на стр. 403, строка 14 снизу, напечатано «Не имеющая в фундаментальной области полюсов», нужно: «Имеющая в фундаментальной области m полюсов»; 2) пункт 3 примечания референта.

Д. А. Квеселава

3860. Об одном функциональном уравнении. **Бэдеску** (Asupra unei ecuaţii funcţionale. Bădescu Radu), Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1954, 6, № 4, 789—795 (рум.; рез. русс., франц.)

Доказана единственность решения уравнения

$$\Phi(z) - \mu \int_a^b k(s)\,\Phi(z+s)\,ds = \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n e^{-\lambda_n z}$$

(z комплексное, λ_n вещественны, $n/\lambda_n \to +0$) в классе функций, представимых в виде

$$\Phi(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n e^{-\lambda_n z}$$

и являющихся мероморфными функциями μ, имеющими $\mu = 0$ обыкновенной точкой, при

$$\mu \neq \left[\int_a^b k(s)\, e^{-\lambda_n s}\, ds\right]^{-1} (n = 1, 2, \dots)$$

и показано, что нетривиальное решение однородного уравнения, построенное Поповичем (Popovici C., Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne, Sec. mat. şi fiz., 1952, 4, № 3, 527) вблизи $\mu = 0$, имеет точку $\mu = 0$ особой и потому не принадлежит к указанному классу функций.

А. Д. Мышкис

3861. Положительные решения одного нелинейного интегрального уравнения. **Пирль** (Positive Lösungen einer nichtlinearen Integralgleichung. Pirl Udo), Ber. Verhandl. Sächsisch. Akad. Wiss. zu Leipzig Math.-naturwiss. Kl. 1953, **100**, № 8, 44 S. (нем.)

Рассматривается уравнение

$$P[y] = f(s) - \lambda + L[y], \qquad (1)$$

где $P[y] = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(s)\, y^n$ (s), $f(s)$ — положительная непрерывная функция на $[a, b]$, $0 \leqslant \lambda < f(s)$,

$$L[y] = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = n} \int_a^b \dots \int_a^b L_{\alpha_1 \dots \alpha_n}(s;\ t_1, \dots$$

$$\dots, t_n)\ \ y^{\alpha}(t_1) \dots y^{\alpha_n}(t_n)\, dt_1 \dots dt_n,$$

$\alpha_n(s)$ и $L_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ — непрерывные функции, причем $L_{\alpha_1 \dots \alpha_n} \geqslant 0$. Налагаются естественные условия, из которых следует сходимость рядов $P[y]$ и $L[y]$ для $|y(s)| \leqslant d$, где $d > 0$, предполагается, что $\partial P[y]/\partial y > 0$, если $y > 0$, и что существует положительная непрерывная функция $y_0(s)$, удовлетворяющая неравенству $P[y_0] > f(s) + L[y_0]$, $|y_0| \leqslant d$. Из последнего следует существование единственной непрерывной положительной функции $y^*(s, \lambda)$, являющейся решением уравнения $P[y] = f(s) - \lambda$. Итерационный процесс

$$P[y_{i+1}(s,\ \lambda)] = f(s) - \lambda + L[y_i(s, \lambda)],\ i = 0, 1, 2, \dots$$

приводит к убывающей последовательности $\{y_i(s, \lambda)\}$, которая сходится к непрерывному по $s \in [a, b]$ решению $y(s, \lambda)$ уравнения (1), где $0 < y^*(s, \lambda) \leqslant y(s, \lambda) < y_0(s)$. Доказывается, что между $y_0(s)$ и $y(s, \lambda)$ нет других решений уравнения (1). Пусть далее $\mathfrak{M}[y]$ есть такое же выражение, как $L[y]$, которое не зависит от s. Если допустить, что найденное решение $y(s, \lambda)$ непрерывно и по λ (достаточные условия для этого приведены) и что существует положительное $c < f(s)$, удовлетворяющее неравенству $\mathfrak{M}[y(s, c)] \leqslant c$, то найдется такое $\lambda_0 \in (0, c)$, что $\mathfrak{M}[y(s, \lambda_0)] = \lambda_0$, а потому уравнение

$$P[y] + \mathfrak{M}[y] - L[y] = f(s) \qquad (2)$$

будет иметь положительное решение $y(s, \lambda_0)$. К уравнению (2) приводится более общее уравнение. Установлены и некоторые свойства решений. Приведены примеры.

М. М. Вайнберг

3862. Теоремы существования решения некоторых систем нелинейных уравнений. **Ахмедов К. Т.**, Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., 1954, № 4, 34—36 (рез. азерб.)

Рассматривается система уравнений

$$B_{ji} + \lambda_{ji}^{-1} \int_0^1 f_j\left(s,\ \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=1}^{n} \lambda^k B_{kl} \varphi_{kl}(s)\right) \psi_{ji}(s)\, ds = 0 \qquad (1)$$

($j = 0, 1, \dots, m$; $i = 1, 2, \dots, n$) относительно неизвестных B_{ji} в предположении, что функции $f_i(s, u)$ для $s \in [0, 1]$ и $u \in [-L, +L]$ удовлетворяют условию Липшица: $|f_j(s, u_1) - f_j(s, u_2)| \leqslant M_j |u_2 - u_1|$,

где $\sum_{j=0}^{m} M_j |\lambda|^j \lambda_{ji}^{-1} < 1$ и $0 < \lambda_{jk} \leqslant \lambda_{jk+1}$ для $k = 1, 2, \dots, n-1$. Системы $\{\varphi_{ji}(s)\}$ и $\{\psi_{ji}(s)\}$ предполагаются ортонормальными при фиксированных j. Доказывается, что система (1) имеет единственное решение, которое находится методом последовательных приближений. Разобран случай, когда $f_j(s, u)$ непрерывны по s, и случай, когда $f_j(s, u)$ при фиксированных u суммируемы с квадратом по $s \in [0, 1]$. Отмечено, что к рассмотрению системы (1) приводит доказательство существования единственного решения у некоторых нелинейных интегральных уравнений.

Встречаются неточные формулировки (не указано, например, что системы $\{\varphi_{ji}(s)\}$ и $\{\psi_{ji}(s)\}$ ортонормированы при каждом фиксированном j, что числа λ_{ji} не убывают при фиксированных j). Некоторые предложения (например, теоремы 3 и 4) справедливы при меньших ограничениях. Встречаются опечатки.

М. М. Вайнберг

3863. О решении одного класса систем сингулярных интегральных уравнений. **Мецховришвили Ш.** (ერთი კლასის სინგულარულ ინტეგრალურ განტოლებათა სისტემის ამოხსნის შესახებ. მეცნიერშვილი შ.), თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტის სტუდენტთა სამეცნ. შრომების კრებული, (Сб. науч. работ студ. Тбилис. ун-та), 1953, **6**, 21—34 (груз.)

Дается обобщение некоторых результатов Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа (Мусхелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, М.—Л., 1946, §§ 89, 90), касающихся одного частного вида сингулярных интегральных уравнений первого рода, на случай системы таких уравнений. Б. В. Хведелидзе

3864. Краевая задача для интегро-дифференциальных уравнений: теоремы существования и единственности. **Джануицци** (Problemi di valori al contorno per equazioni integro-differenziali: teoremi di esistenza e di unicità. Gianuizzi Maria), Ann. Univ. Ferrara Sez VII. (N. S.), 1953, 2, 71—91 (итал.)

Пусть $Y(x) = [y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)]$ для $a \leqslant x \leqslant b$. Доказывается существование и единственность решения интегро-дифференциального уравнения

$$y^{(n)}(x) = f\left[x, Y(x), \int_a^x g(x, u, Y(u))\, du\right],$$

удовлетворяющего начальным условиям $y(x_i) = c_i$, где $a \leqslant x_1 < x_2 < \dots < x_n \leqslant b$, $c_1, \dots, c_n$ — действительные числа. Главным предположением является то, что при фиксированных значениях x и u функции f и g удовлетворяют условию Липшица с малыми постоянными. Осуществляя метод последовательных приближений

автор смог проверить условия теоремы Гильдебрандта и Грейвса (Hildebrandt, Graves, Trans. Amer. Math. Soc., 1927, 29, 127—153), а также условия частного случая этой теоремы, иногда называемого теоремой Каччиополи о неподвижной точке. Во второй части рассматривается подобное уравнение с двумя независимыми переменными. R. G. Bortle

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 6, 534.

3865. О существовании и единственности решений интегро-дифференциальных уравнений. Ко Дя Ха (論積微分方程式的解的存在及唯一性・高截河), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), 1953, **2**, № 4, 275—287 (кит.)

С помощью метода неподвижных точек доказывается существование и единственность решений следующих типов интегро-дифференциальных уравнений:

$$\frac{d^m y(x)}{dx^m} + \lambda \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x) \frac{d^k y(x)}{dx^k} + \lambda \int_a^b \sum_{k=0}^{n} R_k(x,t) + \frac{d^k y(t)}{dt^k}\, dt = f(x),$$

где $a_k(x)$, $R_k(x,t)$ и $f(x)$ — заданные непрерывные функции в $[a, b]$, λ — параметр, $m \geqslant n$.

$$\frac{d^m y}{dx^m} + \sum_{k=0}^{m-1} a_k(x) \frac{d^k y}{dx^k} + \int_a^x K\left(x, t, y(t), \ldots, \frac{d^n y(t)}{dt^n}\right) dt = 0,$$

где $a_k(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции, $K\left(x, t, y(t), \frac{dy}{dt}, \ldots, \frac{d^n y}{dt^n}\right)$ — непрерывная функция относительно своих аргументов, удовлетворяющая условию Липшица:

$$\left| K\left(x, t, y^{(1)}, \frac{dy^{(1)}}{dt}, \ldots, \frac{d^m y^{(1)}}{dt^{(n)}}\right) - K\left(x, t, y^{(2)}, \frac{dy^{(2)}}{dt}, \ldots, \frac{d^n y^{(2)}}{dt^n}\right) \right| \leqslant M \sum_{k=0}^{n} \left| \frac{d^k y^{(1)}}{dt^k} - \frac{d^k y^{(2)}}{dt^k} \right|.$$

$$\frac{d^{m_i} y}{dx^{m_i}} + R_i\left(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(m_1-1)} y_2 y_2' \ldots y_2^{(m_2-1)}, \ldots, y_n y_n' \ldots y_n^{(m_n-1)}\right) + \int_a^x K_i\left(x, t, y_1(t), \ldots, y_1^{(n_1)}(t), y_2^1(t), \ldots, y_2^{(n_2)}(t), \ldots, y_n(t), \ldots, y_n^{(n_n)}(t)\right) dt = 0,$$

где R_i и K_i $(i = 1, \ldots, n)$ — непрерывные относительно своих аргументов функции, удовлетворяющие условию Липшица.

$$\frac{dy_i(x)}{dx} = \sum_{k=1}^{\infty} a^i{}_k(x)\, y_k(x) + b_i(x) \quad (i = 1, 2, \ldots),$$

где $a_{ik}(x)$ и $b_i(x)$ — непрерывные на $[a, b]$ функции такие, что $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}(x)| \leqslant M < \infty$ и $|b_i(x)| \leqslant N$ $(i = 1, 2, \ldots)$. Из резюме автора

3866 Д. Приближенное решение сингулярных интегральных уравнений. Софронов И. Д. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., МГУ, М., 1955

3867 Д. Исследование одной системы нелинейных интегральных уравнений. Кулаков Н. Г. Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н. Моск. обл. пед. ин-т, М., 1955

ПРИЛОЖЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

3868. Интегральные уравнения плоских задач теории поля. Самуэль О. И., Тр. Среднеаз. ун-та, 1954, № 54, 43—50

Решается вопрос о построении интегральных уравнений для краевых задач, связанных с системой дифференциальных уравнений в частных производных вида

$$\partial v/\partial x - \partial u/\partial y = \Omega, \quad \partial u/\partial x + \partial v/\partial y = 0.$$

Доказаны две леммы, в силу которых искомые функции представляются через свои граничные значения и правые части уравнений. Затем строятся интегральные уравнения для первой краевой задачи (когда известна линейная комбинация $u\cos(e, x) + v\cos(e, y)$, где e — вектор касательной к контуру) и для второй задачи (когда известна линейная комбинация $u\cos(n, x) + v\cos(n, y)$, где n — вектор нормали). Построены два варианта интегральных уравнений как для первой, так и для второй краевой задачи. Ядра уравнений первого варианта выражены в явном виде через функцию Грина проблемы Дирихле. Дан пример для круговой области. Интегральные уравнения второго варианта определяют вспомогательные функции в точках граничного контура. Полученные уравнения относятся к классу регулярных. И. С. Аржаных

3869. Конструкция интегральных уравнений плоской теории упругости методом теории векторных потенциалов. Христофоров В. В., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1953, **10**, ч. 2, 134—158
См. РЖМех, 1955, № 3, 1457.

3870. К задаче о кручении составного многосвязного бруса. Сухаревский И. В., Инженерный сб., 1954, **19**, 107—124
См. РЖХим, 1955, № 3, 1460.

3871. О некоторых случаях контактной задачи. Ростовцев Н. А., Укр. матем. ж., 1954, **6**, № 3, 326—332

Данный автором (РЖМех, 1953, 270) эффективный способ решения основного интегрального уравнения плоской контактной задачи распространяется на осесимметрическую задачу, плоскую задачу с двумя равными участками контакта и периодическую задачу с одним участком контакта внутри полосы. При этом во всех случаях предполагается, что трение между штампом и упругой средой отсутствует. Г. Н. Савин

См. также: 3666, 3842, 3854, 3879 **К**, 4093, 4094

АНАЛИЗ (ДРУГИЕ ВОПРОСЫ)

3872. О проблеме Рамануджана. Макинтайр (On a problem of Ramanujan. Macintyre Sheila Scott), J. London Math. Soc., 1955, **30**, № 3, 310—314 (англ.)

Рамануджан поставил следующую задачу: Если n — положительное, показать, что

$$\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+2)^2} + \frac{3}{(n+3)^3} + \frac{4^2}{(n+4)^4} + \frac{5^3}{(n+5)^5} + \ldots, \qquad (1)$$

и найти оценку разности для достаточно больших n.

Автор, заметив, что правая часть неравенства (1) есть интерполяционный ряд Абеля $F(0)+\sum_{r=1}^{\infty}\frac{z(z-r)^{r-1}}{r!}F^{(r)}_{(r)}$ для функции $F(z)=\frac{1}{n+1+z}$ в точке $z=-1$, решает эту задачу Рамануджана. Н. А. Давыдов

3873. Циклоида и спираль Корню. Пародии (Cycloïde et spirale de Cornu. Parodi Maurice), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 18, 1754—1755 (франц.)

Применяя известные формулы преобразования Лапласа, автор получает соотношения

$$t-\sin t=4\int_0^t C(t-\tau)\,S(\tau)\,d\tau,\quad 1-\cos t=$$
$$=4\,\frac{d}{dt}\,C(t-\tau)=S(\tau)\,d\tau,$$

где $C(t)$ и $S(t)$ — интегралы Френеля. Истолковываются эти соотношения геометрически как соответствие между точками спирали Корню и циклоиды и приводится несколько непосредственно обнаруживаемых свойств этого соответствия. Э. Я. Риекстыньш

3874. Об одной теореме Карамата. Делаж (Sur un théorème de Karamata. Delange Hubert), Bull. sci. math., 1955, 79, janvier—février, 9—12 (франц.)

Уточняя один результат Караматы о «медленно растущих» функциях (Mathematica, 1930, 4, 38—53), автор доказывает теорему: Пусть $L(x)$ — положительная измеримая функция, определенная при $x\geqslant x_0>0$. Предположим, что для любого $x>0$ отношение $L(rx)/L(r)$ стремится к 1 при $r\to+\infty$. Тогда это отношение стремится к 1 равномерно на любом отрезке $a\leqslant x\leqslant b$ $(0<a<b)$. Б. И. Коренблюм

3875. Замечание к статье Вундта «Об одном функциональном уравнении теории теплопроводности». Хосу (Eine Bemerkung zur Mitteilung von H. Wundt: «Über eine Funktionalgleichung aus der Wärmeleitung». Hosszu Miktós), Z. angew. Math. und Phys., 1955, 6, № 2, 143—144 (нем.; рез. англ.)

Показано, что решение функционального уравнения

$$2f(z)=f(x)+f(y),\quad z=(x-y)/\ln(x/y)\qquad(1)$$
$$(0<x,\quad y<\infty),$$

найденное Вундтом (РЖМат, 1955, 3289), удовлетворяет уравнению лишь при $A=0$, т. е. когда это решение постоянно. Для этого автор проверяет прямым подсчетом, что тождество $\partial^2\ln(z_x/z_y)/\partial x\,\partial y=0$, вытекающее из уравнения (1) и необходимое для существования дважды гладких решений с отличной от нуля производной, не удовлетворяется. А. Д. Мышкис

3876. Функции, выпуклые относительно данного семейства кривых. Никитин И. И., Уч. зап. Орехово-Зуевск. пед. ин-та, 1955, 1, 49—82

Функция $\varphi(x)$ называется линейной относительно средних $W_1(x,y)$ и $W_2(x,y)$, если $W_1\{\varphi(x),\varphi(y)\}=\varphi\{W_2(x,y)\}$. Аналогично, неравенство $W_1\{\varphi(x),\varphi(y)\}\geqslant\varphi\{W_2(x,y)\}$ характеризует функцию, выпуклую относительно W_1 и W_2 (или относительно соответствующего семейства линейных функций). Находятся функции, линейные относительно средних $W_1=W_2=W$, где

$$W(x,y)=\overline{f}\left\{\frac{1}{2}[f^n(x)+f^n(y)]\right\}$$

($f(x)$ — ограниченная монотонная функция, $\overline{f}$ — функция, ей обратная), или

$$W(x,y)=\overline{f}\{f^{k/n}(x)f^{(n-k)/n}(y)\},$$

а также других средних. Дифференцируемыми линейными функциями в первом случае являются $\varphi(x)=[\overline{f}\{Cf^n(x)+C_1\}]^{1/n}$, а во втором $\varphi(x)=\overline{f}\{C_1f^c(x)\}$. Далее изучаются свойства функций, выпуклых относительно этих семейств, выводятся критерии выпуклости и т. п. В заключение на основании полученных результатов выводятся некоторые неравенства.

Примечание референта. Статья содержит ряд неточностей. Например, на стр. 79 строки 11, 13 и 20 содержат неверные неравенства, вместо которых соответственно должно быть:

$$\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n>n\sin\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$
$$\sin x_1+\sin x_2+\ldots+\sin x_n<n\sin\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n},$$
$$\operatorname{tg}x_1+\operatorname{tg}x_2+\ldots+\operatorname{tg}x_n\geqslant n\operatorname{tg}\sqrt[n]{x_1x_2\ldots x_n}.$$

Эти неравенства, вопреки замечанию автора, являются прямыми следствиями одного общего неравенства, известного из теории выпуклых функций. В. И. Левин

3877. О нулях тригонометрических полиномов с монотонно изменяющимися коэффициентами. Бернацкий (Sur les zéros des polynômes trigonométriques dont la suite des coefficients est monotone. Biernacki M.), Ann. polon. math., 1955, 1, № 2, 380—387 (франц.)

Доказываются следующие факты:

1. При $k<n$ тригонометрические полиномы

$$a_k\sin kt+a_{k+1}\sin(k+1)t+\ldots+a_n\sin nt\qquad(1)$$
$$a_k\cos kt+a_{k+1}\cos(k+1)t+\ldots+a_n\cos nt\qquad(2)$$

с положительными коэффициентами, удовлетворяющими условиям:

$$\frac{a_{k+1}}{a_k}\leqslant\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}\cdot\frac{2k}{2k+1},$$
$$\frac{a_{k+2}}{a_{k+1}}\leqslant\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}\cdot\frac{2k+1}{2k+2},\ldots,\qquad(3)$$
$$\frac{a_n}{a_{n-1}}\leqslant\frac{\sqrt{k}}{\sqrt{k}+1}\,\frac{n+k-1}{n+k}$$

имеют в точности по $2k$ нулей в промежутке $0\leqslant t<2\pi$, причем все эти нули простые.

2. Если известно, что все нули многочлена $a_k+a_{k+1}z+\ldots+a_nz^{n-k}$ являются действительными, то условие (3) может быть заменено следующим:

$$a_k>a_{k+1}>\ldots>a_n>0;$$
$$ka_k-(k+1)a_{k+1}+\ldots\pm na_n>0.$$

3. Если $ka_k\geqslant(k+1)a_{k+1}\geqslant\ldots\geqslant na_n$, то при $k\geqslant2$ полином (1) является положительным при $0<\theta\leqslant\frac{\pi}{2k}$ и отрицательным при $\theta=\frac{\pi}{k}$. В. К. Дзядык

3878. Неравенства для моментов четвертого порядка функции, определенной и ограниченной в евклидовом пространстве n измерений. Виола (Limitazioni per i momenti del quart'ordine d'una funzione definita nello spazio euclideo ad n dimensioni ed ivi limitata. Viola Tullio), Ann. Scuola norm. super. Pisa. Sci. fis. e mat., 1953, 7, № 1—2, 79—89 (итал.)

Пусть функция $f(x)=f(x_1,\ldots,x_n)$ определена в евклидовом пространстве S_n, квазинепрерывна (это по-

нятие не пояснено — *Ред.*), неотрицательна, ограничена числом $L>0$ и имеет конечные моменты до 4-го порядка включительно

$$m_0=\int f d\tau,\quad m_i=\int x_i f d\tau,\ \ldots,\ m_{ijhk}=\int x_i x_j x_h x_k f\ d\tau.$$

Переносом начала координат можно достичь того, чтобы $m_i=0$ $(i=1,\ldots,n)$. Далее при данном $R>0$ можно построить такой гиперэллипсоид $\Sigma a_{ik}x_ix_k=R^2$, чтобы функция $f^*(x)$, равная L внутри и нулю вне него, имела те же моменты 2-го порядка $m^*_{ik}=m_{ik}$; именно

$$a_{ik}=\frac{R^2}{n+2}m^*_0 m'_{ik},$$

где $\|m'_{ik}\|^n_1$ есть матрица, обратная к $\|m_{ik}\|^n_1$, а m^*_0 есть момент $f^*(x)$ 0-го порядка, равный

$$m^*_0=L^{2/(n+2)}(n+2)\pi^{n/(n+2)}\times$$
$$\times[2\Gamma(n/2+2)]^{-2/(n+2)}(|m_{ik}|^n_1)^{1/(n+2)}.$$

Тогда необходимое условие, накладываемое на моменты 4-го порядка m_{ijhk}, состоит в неотрицательной определенности квадратичной формы

$$\sum\nolimits^n_{i,\ k=1}\left\{\sum\nolimits^n_{j,\ h=1}m'_{jh}m_{ijhk}-\frac{(n+2)^2}{(n+4)m^*_0}m_{ik}\right\}\lambda_i\lambda_k.$$

М. К. Фаге

3879 К. Методы объединения математических решений сходной формы. Т. II. Дрейпер, Маккей, Лис (Instrument engineering. Vol. II. Methods for associating mathematical solutions with common forms. Draper Charles Stark, McKay Walter, Lees Sidney, New York-Toronto-London, McGraw-Hill Book Co., Inc., 1953, XXVIII + 827 p. 15.00 doll.) (англ.)

Том состоит из 14 больших глав (с 14-й по 27-ю), содержит около 200 иллюстраций, 10 коротких таблиц и 120 связок размером от одной до нескольких страниц. Книга весит около 8 фунтов. Названия глав: Переход к безразмерным величинам в линейных интегро-дифференциальных уравнениях; Операционные методы решения линейных интегро-дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами; Функция влияния (The relating function), весовая функция, функция переноса (transfer function); Решения, связанные с формами, соответствующими уравнению первого порядка; Решения, связанные с формами, соответствующими дифференциальному уравнению второго порядка; Устойчивость решений; Численные методы определения устойчивости; Методы решения характеристических уравнений 3-го и 4-го порядка; Графические методы определения устойчивости; Графические методы вычисления установившихся синусоидальных функций влияния (relating functions); Вид функций влияния — откликов на импульсные функции (pulse function responses); Представление решений дифференциальных уравнений с нелинейными членами ступенчатого, зависящего от скорости, типа; Численный анализ методом преобразования числовых рядов.

Имеется библиграфия (свыше 80 ссылок). В книге рассматриваются обыкновенные неоднородные дифференциальные уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами. Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение, полученное прибавлением повторных интегралов от искомой функции к линейным комбинациям ее производных, встречающихся в уравнении. Рассмотрены и проиллюстрированы методы решений этих уравнений, причем значительное внимание уделяется особым видам вынуждающих функций, включая «ступенчатые» (step) и «импульсные» (impulse) функции. Подробно рассматривается вопрос об устойчивости решения, т. е. сопоставлении «выхода» с вынуждающей функцией, причем много места уделено алгебраической задаче выявления свойств корней характеристического уравнения. Рассмотрены также вопросы об определении вынуждающей силы, соответствующей данному «выходу», и о преобразовании некоторых специальных классов нелинейных уравнений. Упор делается на формальные методы; имеются ссылки на теорию, на которой основаны эти методы. Обозначений, терминов, диаграмм и пояснений, повидимому, больше, чем нужно. Название сводки № 20—3 (стр. 385): «Абсолютная и относительная устойчивость в зависимости от расположения корней характеристического уравнения на коплексной плоскости». R. V. Churchill

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 529

3880 К. Линейные уравнения в прикладной механике. Пурди (Linear equations in applied mechanics. Purday H. F. P., Edinburgh — London, Oliver and Boyd, New York, Interscience Publishers, Inc., 1954, XIV + 240 pp., 3.50 doll.) (англ.)

Цель этой книги состоит в том, чтобы помочь читателям, имеющим элементарные познания в области анализа, познакомиться со сравнительно элементарными вопросами из теории систем линейных алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных, интегральных уравнений, а также связанными с ними понятиями матриц, детерминантов, инвариантов, векторов, тензоров, сопряженных функций, ортогональных систем функций и рядов и т. д. (из предисловия автора).

Теория иллюстрируется приложениями к балкам с непрерывной нагрузкой, колебательным контурам, теплопроводности, упругости, гидродинамике, колебаниям струн и мембран. Книга в особенности предназначена для инженеров, математические понятия становятся осязаемыми благодаря многочисленным, детально разработанным числовым решениям задач. Новой и полезной для книг такого характера особенностью является включение главы о линейных интегральных уравнениях и их применениях к расчету балок с непрерывной нагрузкой. J. L. Synge

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 11, 959.

3881 К. Сборник задач по математике. Георгиев, Караниколов, Иванов, Панов, Пенков, Цветков (Сборник от задачи по математика. За учителските инст. Георгиев Г., Караниколов Хр., Иванов Ал., Панов Д., Пенков П., Цветков Цв., София, Нарпросв., 1955, 443 стр., 13.70 лв.— Литогр. изд.), Българ. книгопис, 1955, 59, № 4, 7 (болг.)

3882 К. Дифференциальное исчисление (Учеб. пособие). Изд. 4-е. Глаголев А. А., Глаголева А. А. Всес. заоч. ин-т сов. торговли, М., 1955, 144 стр. с черт., б. ц.

3883 К. Интегральное исчисление (Учеб. пособие). Изд. 3-е. **Минквиц А. А.**, Всес. заоч. ин-т сов. торговли, М., 1955, 92, стр. с черт., б. ц.

3884 К. Краткий курс высшей математики. Георгиев (Кратък курс по висша математика. 2. перераб. и доп. изд. Георгиев Г. Ив., София, Наука и изкуство, 1954 (1955), 724 стр., 25 90 лв.), Българ. книгопис, 1955, 59, № 4, 7 (болг.)

3885 К. Сборник задач по курсу математического анализа. Берман (Збірник задач з курсу математического анализу. (Учбов. посібн. для вищих учб. закладів). Берман Г. М. Перекл. с 3 рос. вид., Київ, Держ. вид-во техн. літ. УРСР, 1954, 528 стр.) (укр.)

3886 К. **Курс высшей математики. т. III, ч. 2.** Смирнов (Lehrgang der höheren Mathematik. Teil III, 2, Smirnow W. I., Übers. aus der 5 Russ. Aufl., Berlin, VEB Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 601 S.) (нем.)

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

3887. **О последовательностях с расходящейся полной вариацией.** Стейнберг (On sequences with divergent total variation. Stenberg Warren), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1955, A58, № 2, 178—190; Indagationes Math. 1955, 17, № 2, 178—190 (англ.)

Доказывается теорема: Из членов любой сходящейся к нулю последовательности $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющей условиям $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$, $\Sigma_{n=1}^{\infty} a_n = \infty$, можно составить путем перестановки членов последовательность $b_1, b_2, \ldots$, $\Sigma_{n=1}^{\infty} b_n = \infty$, что для всякой ее подпоследовательности $c_1, c_2, \ldots$, где $\Sigma_{n=1}^{\infty} c_n = \infty$, имеет место $\Sigma_{n=1}^{\infty} | c_n - c_{n+1} | = \infty$, — и другие аналогичные теоремы.

Как указывает автор, соответствующая проблема была поставлена Вейем в его диссертации.

Ф. И. Харшиладзе

3888. **О суммировании двойных рядов методом Бернштейна — Рогозинского.** Бендукидзе А. Д., Тр. Груз. политехн. ин-та, 1955, 37, № 2, 79—92 (рез. груз.)

Для двойного ряда $\Sigma_{i=0\ j=0}^{\infty} a_{ij}$ образуем выражения

$$s_{mn} = \sum_{i=0\ j=0}^{m,\ n} a_{ij}, \quad \sigma_{mn} = \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{i=0\ j=0}^{m,\ n} s_{ij},$$

$$B_{mn} = \sum_{i=0\ j=0}^{m,\ n} a_{ij} \cos i\pi/(2m+1) \cos j\pi/(2n+1).$$

Будем говорить, что ряд Σa_{ij} суммируется λ-методом Бернштейна и Рогозинского к s (БР$^{\lambda}$-суммируется к s), если $\lim_{(m,\ n)\lambda \to \infty} B_{mn} = s$, где $(m,\ n)_{\lambda}$ означает, что m и n удовлетворяют условию $\frac{1}{\lambda} \leqslant \frac{m}{n} \leqslant \lambda$, $\lambda > 1$.

В работе установлены следующие теоремы:

1. Если $\lim_{(m,\ n) \to \infty} s_{mn} = s$,

$$s_{mn} = o(m^2) \text{ при любом } n, \ s_{mn} = o(n^2) \text{ при любом } m, \tag{1}$$

то ряд Σa_{ij} БР$^{\lambda}$-суммируется к s при любом $\lambda \geqslant 1$.

2. Если $\lim_{(m,\ n) \to \infty} \sigma_{mn} = s$,

$$\sigma_{mn} = o(m^2) \text{ при любом } n, \ \sigma_{mn} = o(n^2) \text{ при любом } m, \tag{2}$$

то ряд Σa_{ij} БР$^{\lambda}$-суммируется к s при любом $\lambda \geqslant 1$.

В работе также показывается, что при невыполнении одного из условий (1) или (2) соответствующая теорема может оказаться неверной. Доказательство приведенных выше теорем основывается на использовании теоремы 2 работы В. Г. Челидзе (Тр. Тбилис. матем. ин-та, 1949, 17, 60—94).

И. И. Огиевецкий

3889 К. **Расширение области сходимости на основе новой классификации.** Блазер (Eine Erweiterung des Konvergenzbegriffes auf Grund einer neuen Klassifikation. Diss. Blaser Jean. Langnau. Buchrunckerei. Emmenthaler — Blatt, 1953, 31 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 21, 1773 (нем.)

3890 К. **Возвратные последовательности.** Маркушевич (Rekursive Folgen. Markuschewitsch A. I. Übers. aus dem Russ. Berlin, VEB Dtsch. Verl. der Wiss., 1955, 48 S.) (нем.)

Перевод с русского. (М.—Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры, 1951).

3891 К. **Ряды Фурье.** Толстов (Fourierreihen. Tolstow G. P.) Berlin, VEB, Dtsch. Verl. Wiss., 1955, 300 S.) (нем.)

Перевод с русского (М.—Л., 1951)

СПЕЦИАЛЬНЫЕ ФУНКЦИИ

3892. **Вырожденные гипергеометрические функции.** Трикоми (Konfluente hypergeometrische Funktionen. Tricomi Francesco G.), Z. angew. Math. und Phys., 1955, 6, № 4, 257—274 (нем.; рез. англ.)

Статья носит обзорный характер. Изучается решение вырожденного гипергеометрического уравнения

$$xy'' + (c - x)y' - ay = 0 \tag{1}$$

в форме определенного интеграла

$$\Phi(a, c; x) =$$

$$= \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-a)} = \int_0^1 e^{xt} t^{a-1} (1-t)^{c-a-1} dt. \quad 0 < \operatorname{Re} a < \operatorname{Re} c.$$

Отмечаются основные свойства функции $\Phi(a, c, x)$, различные интегральные представления функции, формулы для вычисления производных высших порядков, лапласовское преобразование функции и т. п.

Аналогичные формулы приводятся для второго частного решения уравнения (1)

$$\Psi(a, c; x) =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-xt} t^{a-1} (1+t)^{c-a-1} dt, \quad \operatorname{Re} a > 0, \ \operatorname{Re} x > 0$$

Даются разложения вырожденных функций в ряды, расположенные по цилиндрическим функциям, полиномам Лагерра и т. п. Изучается асимптотика вырожденных функций как при $x \to \infty$ и $x \to 0$, так и при больших значениях параметра $\chi = c/2 - a$.

В заключение приводится сводка наиболее распространенных специальных функций, являющихся частными случаями вырожденных гипергеометрических функций.

Н. С. Копляков

3893. **К теории гипергеометрических функций двух переменных.** Оу Чжень-ян (Contribution à l'étude des fonctions hypergéométriques de deux variables. Ou Tchen-Yang Vincent), Ann. scient. École norm. supér., 1955, 72, № 1, 1—68 (франц.)

Изучается класс гипергеометрических функций двух комплексных переменных x и y, введенный Аппелем. Эти функции допускают интегральное представление

$$z = \int G(u)\, du, \ G(u) = u^{\alpha} (u-1)^{\beta} (u-x)^{\gamma} (u-y)^{\delta}, \tag{1}$$

где замкнутый путь интегрирования должен обходить особые точки 0, 1, x, y, ∞ так, чтобы функция $G(u)$ возвращалась к исходному значению (т. е. путь каждую особую точку обходит такое же число раз в од-

ном направлении, как и в обратном). Они также удовлетворяют системе дифференциальных уравнений в частных производных

$$x(x-1)r+y(y-1)s=[(\alpha+\beta+2\gamma+\delta)x+\delta y-$$
$$-(\alpha+\gamma+\delta)]p-\gamma(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)z,$$
$$x(x-1)s+y(y-1)t=[\gamma x+(\alpha+\beta+\gamma+2\delta)y-$$
$$-(\alpha+\gamma+\delta)]q-\delta(\alpha+\beta+\gamma+\delta+1)z,$$
$$(y-x)s=\delta p-\gamma q. \qquad (2)$$

В гл. 1 рассматриваются свойства решений системы (2) как аналитических функций двух комплексных переменных. Проводится аналогия между системой (2) и дифференциальным уравнением гипергеометрических функций одной переменной, в которой роль особых точек играют сингулярные аналитические плоскости системы $x=0$, $x-1=0$, $y=0$, $y-1=0$, $y-x=0$ и бесконечно удаленная аналитическая плоскость, а роль разрезов — некоторые гиперповерхности, содержащие сингулярные аналитические плоскости. Вводится и изучается группа монодромии, которая для рассматриваемой системы порождается пятью фундаментальными подстановками (связанными между собой некоторыми соотношениями). Гл. 2 посвящена изучению интегралов (1), классификации путей интегрирования (исходя из «элементарных» путей, обходящих две из 5 особых точек 0, 1, x, y и ∞ функции $G(u)$ по два раза каждую в противоположных направлениях) и зависимости этих интегралов от подвижных особенностей x и y. Основную роль здесь играют 10 интегралов (по 10 возможным «элементарным» путям), которые обладают тем свойством, что при обходе одной из точек x, y вокруг другой каждый из этих интегралов умножается на некоторый множитель. В гл. 3 изучаются линейные преобразования трехмерного комплексного пространства (z_1, z_2, z_3), порождаемые подстановками группы монодромии (z_1, z_2, z_3 — значения фундаментальной системы решений системы (2) в некоторой точке (x, y)). В гл. 4 α, β, γ, δ предполагаются действительными числами, вследствие чего z принимает вещественные значения при вещественных значениях аргументов x, y. В этом случае подстановки группы монодромии изучаются как линейные преобразования в двумерном комплексном проективном пространстве с однородными координатами z_1, z_2, z_3. Здесь каждая подстановка группы монодромии оказывается произведением двух зеркальных отображений в некоторых двумерных многообразиях. В. И. Левин

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ И ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

3894. О наглядном изложении преобразования Лапласа. Гаустер (Über die Veranschaulichung der Laplase-Transformation. Gauster Wilhelm F.), Elektrotechnik und Maschinenbau, 1954, **71**, № 9, 236—241 (нем.)

См. РЖФиз, 1955, № 5, 9637.

3895. Приложение преобразования Лапласа к суммированию рядов, разложенных по специальным функциям. Салехов Г. С., Уч. зап. Казанск. гос. пед. ин-та, 1955, № 10, 3—8

Указывается формула

$$\sum_{k=1}^{\infty} a(k)(\pm 1)^k f_k(t) =$$
$$=\int_0^1 \frac{\varphi(-\ln\xi)}{\xi} F(\pm\xi, t)\,d\xi, \quad (\alpha<t<\beta),$$

где

$$a(k)=\int_0^{\infty} e^{-ks}\varphi(s)\,ds,$$
$$F(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty} x^k f_k(t) \qquad (\alpha<t<\beta),$$

если частичные суммы ряда $\Sigma_{k=1}^{\infty}(\pm 1)^k f_k(t)$ ограничены $(\alpha<t<\beta)$. Приводятся примеры приложения этой формулы.

Примечание референта. Статья содержит опечатки, как в формулах, так и в тексте. Например, в формулировке теоремы (5 строка жирного текста) должно быть «Их коэффициенты» вместо «Коэффициенты его», второе условие теоремы гласит: «Имеет место условие 1» (имеется в виду сходимость ряда (1), как это можно догадаться из контекста), в формуле 10-й строки на стр. 5 r должно быть в показателе, в начале стр. 7 должно быть «..., то коэффициенты ее разложения...» вместо «...его разложения...».

В. И. Левин

3896. Обращение обобщенного преобразования Фурье с помощью абелева суммирования. Блэкман (The inversion of the generalized Fourier transform by abelian summability. Blackman Jerome), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, 78, № 1, 19—29 (англ.)

Определения:

1. L_p^k, $1\leqslant p<\infty$, — класс функций $f(x)$ с конечной нормой

$$\|f\|_{k,p}=\left(\int_{-1}^{1}|f(x)|^p\,dx+\int_{|x|>1}\left|\frac{f(x)}{x^k}\right|^p dx\right)^{1/p}.$$

2. L_{∞}^k — класс функций с конечной нормой

$$\|f\|_{k,\infty}=\operatorname*{ess\,sup}_{-\infty<x<\infty}|f(x)K_k(x)|,$$

где $K_k(x)=\begin{cases}1/x^k & |x|>1\\ 1 & |x|\leqslant 1.\end{cases}$

3. $f(x)$ называется равномерно непрерывной в L_{∞}^k, если $f\in L_{\infty}^k$ и для каждого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta_1=\delta_1(\varepsilon)>0$, что $|f(x+\delta)-f(x)|K_k(x)<\varepsilon$ для всех $\delta<\delta_1$ и всех x.

4. $f_n(x)$ сходится при $n\to\infty$ к $f(x)$ в ω-топологии на L_{∞}^k, если для некоторой $h(x)\in L_1^0$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)-f_n(x)|K_k(x)h(x)\,dx=0.$$

5. Если $\varphi\in L_p^{k-1}$, $1<p<\infty$, L_1^k или L_{∞}^{k-2}, то обобщенным преобразованием Фурье (Бохнера) функции $\varphi(t)$ называется функция

$$E(k,x)=\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(t)}{(it)^k}\{e^{itx}-L_k(t,x)\}\,dt,$$

где

$$L_k(t,x)=\begin{cases}\sum_{n=0}^{k-1}\frac{(itx)^n}{n!}, & |t|\leqslant 1\\ 0 & |t|>1.\end{cases}$$

6. $$\varphi_{\varepsilon}(s)=\frac{(-1)^k}{(2\pi)^{1/2}}(\varepsilon-is)^k\int_{-\infty}^{0}E(k,x)e^{x(\varepsilon-is)}\,dx+$$
$$+\frac{(-1)^k}{(2\pi)^{1/2}}(-\varepsilon-is)^k\int_0^{\infty}E(k,x)e^{x(-\varepsilon-is)}\,dx.$$

Доказывается теорема:

а) Если $\varphi \in L_1^k$, то $\lim_{\varepsilon \to 0} \| \varphi_\varepsilon(s) - \varphi(s) \|_{k,1} = 0$.

б) Если $\varphi \in L_p^{k-1}$, $1 < p < \infty$, то $\lim_{\varepsilon \to 0} \| \varphi_\varepsilon(s) - \varphi(s) \|_{k-1,\, p} = 0$.

в) Если $\varphi \in L_\infty^{k-2}$, то $\varphi_\varepsilon(s)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ в ω-топологии на L_∞^{k-2} к $\varphi(s)$.

г) Если φ равномерно непрерывна в L_∞^{k-2}, то

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \| \varphi_\varepsilon(s) - \varphi(s) \|_{k-2,\infty} = 0.$$

В конце работы дается обобщение теоремы Хаусдорфа — Юнга для обобщенных преобразований Фурье.

Б. М. Левитан

3897. Преобразования Фурье на совершенных множествах. Хелсон (Fourier transforms on perfect sets. Helson Henry), Studia math., 1954, **14**, № 2, 209—213 (англ.)

Доказывается следующая теорема: Пусть P есть ограниченное совершенное множество на прямой. Пусть для каждой функции φ, определенной и непрерывной на P, существует суммируемая функция f такая, что

$$\varphi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\, e^{ixy}\, dy, \quad x \in P.$$

Для каждой функции μ с ограниченной вариацией рассмотрим преобразование Фурье — Стилтьеса:

$$\hat{\mu}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, d\mu(x).$$

Если μ постоянна на интервалах смежности к P, то $\hat{\mu}$ не стремится к нулю при $|y| \to \infty$. В частности, взяв за P интервал, получим, что не каждая непрерывная функция на P совпадает с интегралом Фурье—Стилтьеса.

Б. М. Левитан

3898. Об обобщенной формуле обращения Стилтьеса-Поста и об асимптотическом интеграле. Сюй Ли-чжи, У Чжи-цюань (廣義Stieltjes-Post 反演公式及漸近積分 • 徐利治, 吳智泉), 數學學報, (Шусюэ сюэбао, Acta math. sinica), 1955, 5, № 2, 161—172 (кит.; рез. англ.)

Известно, что существует обобщенная формула обращения Стилтьеса — Поста — Уиддера для интегральных преобразований вида:

$$f(\lambda, t) = \int_0^{\infty} \psi(u, \lambda, t)\, g(u)\, du, \; g(u) \in L(0, \infty) \quad (1)$$

(Hsu L. C., Amer. J. Math., 1951, 73, 199—210), где λ — параметр, а ядро ψ — регулярная преобразующая функция, удовлетворяющая трем условиям, именно: для фиксированного $t > 0$

$$\lg \psi(u, v, t) = F(u, v, t),$$

F_u, F_{uu} являются вещественными непрерывными функциями ($u \geqslant 0$, $v > 0$) такими, что: 1) $F_u(u, v, t) = 0$ имеет решение $u = \varphi(v, t)$, где $\lim_{v \to \infty} \varphi(v, t) = \theta(t) > 0$; 2) $F_{uu}(u, v, t) < 0$ для больших v и всех $u > 0$; 3) $F_{uu}(u, v, t) \sim F_{uu}(\theta(t), v, t) \to -\infty$ при $u \to \theta(t)$, $v \to \infty$.

В данной заметке показывается, что 2) может быть заменено более слабым условием, именно: 2′) $F_u(u, v, t) \leqslant 0$ для $\varphi(v, t) < u < \infty$; существуют постоянные $U, \delta > 0$ такие, что для больших значений v

$$|F_u(u, v, t)|^{-1} \leqslant u\, \{(1 + \delta) \lg u\}, \; u \geqslant U.$$

Согласно этому класс K регулярных преобразующих функций может быть переопределен условиями 1), 2′), 3) и общая формула обращения все же имеет место:

$$g(\theta(t)) = \lim_{\lambda \to \infty} \left(\frac{-F_{uu}(u, \lambda, t)}{2\pi\, (\psi(u, \lambda, t))^2} \right)^{1/2}_{u = \varphi(\lambda, t)} \quad (2)$$

$$f(\lambda, t), \quad (\psi \in K),$$

где $\lambda \to \infty$ по последовательности $\{\lambda_n\}$ такой, что $\{\varphi(\lambda_n, t)$ вместе с $\lim \varphi(\lambda_n, t) = \theta(t) > 0$ принадлежит лебегову множеству для $g(n)$. Это достигается подходящим изменением леммы 1 и ее доказательства (см. цит. соч.). Построен, например, в котором выполнены условия 1), 2′), 3), но не выполнено 2). Ясно, что обычная формула Поста — Уиддера является частным случаем с $\varphi(u, \lambda, t) = e^{-\lambda u/t} u^\lambda$. Вторая часть заметки содержит следующий результат: Пусть $F(u, v)$, $F_u(u, v)$, $F_{uu}(u, v)$ непрерывны в области $D(-\infty < u < \infty,\ 0 < v < \infty)$ и удовлетворяют условиям: 1) существует число $\xi\ (-\infty < \xi < \infty)$ такое, что $|F_u(\xi, v)|$ ограничен при $v \to \infty$, и, кроме того, $F_{uu}(u, v) \sim F_{uu}(\xi, v) \to -\infty$ при $(u, v) \to (\xi, \infty)$; 2) существует область $R(|u - \xi| \leqslant d,\ v \geqslant N)$, в которой $F_{uu}(u, v) < 0$ и, кроме того, для всех $v > N$, $F_u(u, v) \geqslant 0$ $(-\infty < u \leqslant \xi - d)$, $F_u(u, v) \leqslant 0$ $(\xi + d \leqslant u < \infty)$; 3) существуют положительные числа $p > 1 > q > 0$ и U, V такие, что

$$|uF_u(u, v)| > \lg|u| + p \lg\lg|u| - |F_{uu}(\xi, v)|^q;$$

$$(|u| > U, \; v > V).$$

Тогда

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \exp[F(u, \lambda)]\, du \sim \exp[F(\xi, \lambda)]\, (-2\pi / F_{uu}(\xi, \lambda))^{1/2}$$

$$(\lambda \to \infty).$$

Это является обобщением одной теоремы из работы Сюй Ли-чжи (Hsu L. C., 清華大學科學報告 (Цинхуа дасюэ кэсюэ баогао), 1949, **15**, 273—279

Очевидно, что предположение 3) может быть опущено, если мы имеем дело с асимптотическим поведением определенного интеграла

$$\int_a^b \exp[F(u, \lambda)]\, du \quad (-\infty < a < b < \infty)$$

вместо интеграла с бесконечными пределами.

Резюме авторов.

3899 К. Операционное исчисление для двух переменных и его приложения. Поли, Делрю (Le calcul symbolique à deux variables et ses applications. Poli L., Delerue P. (Mem. sci. math., Fasc. CXXVII), Paris, 1954, 77) (франц.)

Краткий обзор теории и приложений двойного преобразования Лапласа. Книга состоит из введения, четырех глав, добавления и библиографии (95 названий). Во введении дается схематический очерк новейшего развития операционного исчисления в одном и двух переменных ($ОИ_1$ и $ОИ_2$) и некоторых его обобщений, в которых интеграл Лапласа заменяется интегралом с ядром, выражающимся через функцию Уиттекера (преобразование Варма (Varma) для $ОИ_1$ и преобразование Бозе (Bose) для $ОИ_2$). В гл. 1 рассматривается двойное преобразование Лапласа. Теоремы, за редкими исключениями, не доказываются, но положения, отличающие $ОИ_2$ от $ОИ_1$, особо подчеркиваются и иллюстрируются примерами. Уделяется внимание некоторым принципиальным вопросам, например, связанным с использованием интегралов Лапласа — Римана, Лапласа — Стилтьеса и Лапласа — Лебега. В дальней-

шем изложение ведется в предположении, что двойной интеграл Лапласа

$$\int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} F(s, t)\, ds\, dt \qquad (1)$$

абсолютно сходится хотя бы для одной пары значений $p = p_0$, $q = q_0$. Представляет интерес сводка методов обращения интеграла (1), приведенная в конце главы, в частности метод Америо (Amerio, Mem. Ass. Ital., 1941, 12), обобщающий на $ОИ_2$ метод Трикоми — Пиконе, дающий начальную функцию в виде ряда по полиномам Лежандра. Авторы обобщают метод Америо на произвольные системы ортонормированных полиномов

$$L_n(x) = \sum_{j=0}^n l_{nj} x^j, \qquad \int_0^1 \Phi(s) L_m(s) L_n(s)\, ds = \delta_{mn},$$

и выводят формулу:

$$F(x, y) = e^{p_0 x + q_0 y} \Phi(e^{-ax}) \Phi(e^{-by}) \times$$
$$\times \sum_{m,n=0}^{\infty} A_{mn} L_m(e^{-ax}) L_n(e^{-by}),$$

где

$$A_{m,n} = ab \sum_{j=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} l_{mi}\, l_{nj} \times$$
$$\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-[p_0+(i+1)a]s-[q_0+(j+1)b]t} F(s, t)\, ds dt.$$

Гл. 2 содержит обзор формул $ОИ_2$, вытекающих из основных теорем подобия, запаздывания, дифференцирования и интегрирования, а также теоремы Бореля для $ОИ_2$. Приводится формула Парсеваля

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f_1(u, v) F_2(u, v) \frac{du}{u} \frac{dv}{v} = \int_0^\infty \int_0^\infty F_1(s, t) f_2(s, t) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t},$$

где $f_k(p, q) \subset F_k(x, y)$, $k = 1, 2$, полезная для вычисления некоторых определенных интегралов, а также обобщение авторами формулы Ван-дер-Поля, именно:

$$\int_0^x \int_0^y F(s, t)\, g\left(\frac{s}{x}, \frac{t}{y}\right) \frac{ds}{s} \frac{dt}{t} \supset$$
$$\supset \int_p^\infty \int_q^\infty f(u, v)\, g\left(\frac{p}{u}, \frac{q}{v}\right) \frac{du}{u} \frac{dv}{v},$$

где $f(p, q) \subset F(x, y)$, а g — произвольная функция. В заключение главы приводятся формулы, содержащие итерированные преобразования Лапласа (результаты Эмбера, Пароди и авторов). Гл. 3 содержит обзор другой группы формул $ОИ_2$ (формулы «преобразования»), дающих изображения, соответственно, начальные функции таких выражений, как $F(x+y)$, $F(|x-y|)$, $F(\sqrt{x^2+y^2})$, $1/\sqrt{\pi(x+y)}\, F(xy/(x+y))$ и т. п., $f(\sqrt{p}, \sqrt{q})$ и т. п. Глава содержит также наиболее интересные частные случаи этих формул. Гл. 4 посвящена приложениям $ОИ_2$ к вычислению определенных интегралов, интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных, теории гипербесселевых функций

$$J_{m,n}(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^{m+n} \frac{1}{\Gamma(m+1)\Gamma(n+1)} \times$$
$$\times {}_0F_2\left(m+1, n+1; -\frac{x^3}{27}\right)$$

(см. также РЖМат, 1955, 1820, 1821) и теории полиномов Лагерра в двух переменных. Дается полезный обзор методов применения $ОИ_2$ к интегрированию дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка, в том числе метод условий «совместности» (Verträglichneitsbedingungen) Фелькера и Дёча. В добавлении намечаются возможности распространения теории на $ОИ_n$. Книга содержит обзор всех результатов до 1954 г. В. И. Левин

ПРИЛОЖЕНИЯ ОБЩИХ МЕТОДОВ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

3900. Положение системы трех последовательно соединенных математических маятников, находящихся в одной плоскости, при ее периодическом движении вокруг положения устойчивого равновесия. Брадистилов (Разположение на една система от три последователно свързани математични махала в една равнина при периодичните й движения около стабилното равновесно положение. Брадистилов Г.), Изв. Матем. ин-т Българ. АН, 1954, 1, № 2, 135—145 (болг.; рез. русс.)

Перевод этой статьи помещен в журнале «Прикладная математика и механика», 1955, 19, № 1 (РЖМат, 1956, 2193)

Ю. А. Митропольский

3901. Определение местоположения и размеров эллиптического параболоида по наблюдениям с гравитационным вариометром. Юньков А. А., Изв. Днепропетр. горн. ин-та, 1955, 23, 55—63

Исходя из потенциала однородного эллипсоида, выраженного в системе координат с началом в одной из его вершин, предельным переходом выводится потенциал однородного эллиптического параболоида и его частные производные второго порядка, значения которых могут быть измерены в плоскости, перпендикулярной оси параболоида и проходящей над ним. Указывается, как на основании этих измерений может быть установлено местоположение, а также размеры залегающего под землей полезного ископаемого, имеющего форму купола. В. И. Левин

3902. Определение местоположения и размеров заряженного трехосного эллипсоида и эллипсоида вращения около горизонтальной оси по измерениям его градиента потенциала. Афанасьев Н. Л., Кучин В. П., Изв. Днепропетр. горн. ин-та, 1955, 23, 65—70

Из известных выражений для градиента потенциала заряженного эллипсоида выводится способ определения его центра и размеров по измерениям градиента на плоскости, параллельной его оси и проходящей над ним. В. И. Левин

3903. Общее решение задачи о модуляции двумя частотами. III. Выпрямители и ограничители. Стернберг (A general solution of the two-frequency modulation product problem. III. Rectifiers and limiters. Sternberg Robert L.), J. Maht. and Phys., 1954, 33, № 2, 199—205 (англ.)

Рассматривается применение изложенной ранее теории (РЖМат, 1954, 5657) и таблиц соответствующих специальных функций (РЖМат, 1956, 1690) к исследованию некоторых идеальных выпрямителей и ограничителей по данным их ломаным характеристикам. Н. А. Бразма

См. также: 3635, 3655, 3736 К, 3742, 3795 К, 3798, 3842, 4074, 4079, 4099, 4115

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

3904. О выпуклых множествах в абстрактных линейных пространствах без какой-либо топологии (Хамелевские тела и линейная ограниченность). Финкбейнер, Никодим (On convex sets in abstract linear spaces where no topology is assumed (Hamel bodies and linear boundedness). Finkbeiner D. T., Nikodým O. M.), Rend. Seminar mat. Univ. Padova, 1954, **23**, № 2, 357—365 (англ.)

Рассматривается вещественное векторное пространство L. Выпуклое множество B называется выпуклым телом, если существует точка $x \in B$, являющаяся внутренней точкой пересечения B с любой прямой $l \subset L$, проходящей через x. Если $H \subset L$ — база Хамеля (т. е. совокупность линейно независимых векторов таких, что каждый вектор $x \in L$ является линейной комбинацией некоторых векторов из H), то выпуклая оболочка множества $H \cup (-H)$ (множество $-H = \{x;\ -x \in H\}$) называется хамелевским телом и обозначается через $B(H)$.

Пусть M и N — два подпространства таких, что $M + N = L$ (под $M + N$ понимается $\{m + n;\ m \in M, n \in N\}$), $M \cap N = \{0\}$, а вектор $x = m + n$, где $m \in M$, $n \in N$, тогда вектор $x' = m - n$ называется симметричным к x относительно (M, N). Множество S', состоящее из векторов x', симметричных к векторам $x \in S$ относительно (M, N), называется симметричным к множеству S относительно (M, N).

Основные результаты:

1. Если пространство L имеет счетную базу Хамеля, то, каково бы ни было выпуклое тело B, найдется хамелевское тело $B(H)$ такое, что $B + B(H) = L$.

2. Пусть B — выпуклое тело в бесконечномерном векторном пространстве L, гиперплоскость P такова, что $P + B = L$ (такая гиперплоскость всегда существует), прямая l пересекает P в точке 0, B' — множество, симметричное к B относительно (l, P), тогда $l \subset B + B'$. Г. Ш. Рубинштейн

3905. Об опорной функции выпуклых множеств в локально выпуклом пространстве. Хёрмандер (Sur la fonction d'appui des ensembles convexes dans un espace localement convexe. Hörmander Lars), Arkiv. mat., 1955, **3**, № 2, 181—186 (франц.)

Классические теоремы об опорных функциях выпуклых подмножеств n-мерного пространства переносятся на произвольное локально выпуклое пространство E с вещественными скалярами. Опорная функция $H(y) = \sup_{x \in K} \langle x, y \rangle$ $(y \in E')$ замкнутого выпуклого множества $K \subset E$ характеризуется как слабо полунепрерывная снизу выпуклая положительно однородная функция на E', не принимающая значения $-\infty$. Она сильно (слабо) непрерывна тогда и только тогда, когда K ограничено (конечномерно и ограничено). В совокупность $\mathfrak{K}$ всех ограниченных замкнутых выпуклых множеств вводится топология, в которой окрестность множества $K_0 \in \mathfrak{K}$ определяется как множество всех $K \in \mathfrak{K}$ таких, что $K \subset K_0 + \varepsilon U$ и $K_0 \subset K + \varepsilon U$, где U — окрестность нуля в E и $\varepsilon > 0$. Отображение $K \to H(y)$ осуществляет алгебраически, топологически и упорядоченно изоморфное вложение $\mathfrak{K}$ в качестве выпуклого конуса в пространство $\mathfrak{H}$ сильно непрерывных положительно однородных функций $h(y)$ на E' с топологией равномерной сходимости на равностепенно непрерывных подмножествах из E' (локально выпуклое в этой топологии). Это обобщение теоремы, полученной для случая нормированного пространства E (при некоторых дополнительных ограничениях на $\mathfrak{K}$) Родстрёмом (Rådström H., Proc. Amer. Math. Soc., 1952, **3**, 165—169). Д. А. Райков

3906. О топологической эквивалентности равномерно выпуклых пространств. Кадец М. И., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 137—141

Доказывается теорема: Сепарабельные равномерно выпуклые пространства топологически эквивалентны. Д. П. Мильман

3907. Характеристика рефлексивности, связанная со структурой замкнутых подпространств. Флойд, Кли (A characterization of reflexivity by the lattice of closed subspaces. Floyd E. E., Klee V. L.), Proc. Amer. Math. Soc., 1954, **5**, № 4, 655—661 (англ.)

Авторы получают следующее усиление критерия слабой компактности выпуклого множества в линейном нормированном пространстве, установленного В. Л. Шмульяном (Матем. сб., 1939, **5**(**47**), 317—328): Ограниченное замкнутое выпуклое множество в линейном нормированном пространстве является слабо компактным тогда и только тогда, когда пересечение любой убывающей последовательности замкнутых линейных многообразий (линейным многообразием называется результат параллельного перенесения линейного множества), содержащих точки данного множества, не пусто.

С помощью этого устанавливается признак рефлексивности пространства: Линейное нормированное пространство рефлексивно тогда и только тогда, когда структура всех его подпространств (замкнутых линейных подмножеств) относительно топологии упорядоченности является хаусдорфовым пространством. Г. Ш. Рубинштейн

3908. Дифференциальная геометрия без аксиомы размерности. I. Тензоры на локально линейных пространствах. Лаугвиц (Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. I. Tensoren auf lokal-linearen Räumen. Laugwitz Detlef), Math. Z., 1954, **61**, № 1, 100—118 (нем.)

Реферируемая работа является началом большого исследования по построению дифференциальной геометрии бесконечномерных пространств. Отличие от более ранних работ в том же направлении в значительной мере состоит в предложенной автором символике, позволяющей сохранить внешнюю аналогию полученных им формул с формулами обычной (конечномерной) дифференциальной геометрии и облегчающей перенесение в бесконечномерное пространство классических результатов римановой геометрии. Символика заключается в том, что все элементы линейного нормированного пространства обозначаются буквами с верхними индексами, взятыми из произвольно выбранного ряда символов (например, строчными буквами латинского или греческого алфавита); при этом для обозначения элемента служит основная буква, а индекс имеет чисто формальное значение. Соответственно этому, например, линейные операторы, осуществляющие отображение одного линейного нормированного пространства во второе, имеют два индекса — нижний и верхний; линейные функционалы пространства обозначаются теми же индексами, что и элементы соответствующего пространства, но только поставленными снизу («ковариантные индексы»), что позволяет добиться выполнения важного условия о том, что «свертка» по индексам, стоящим снизу и сверху, всегда дает скаляр.

Вначале излагаются необходимые сведения из теории линейных и нормированных пространств; здесь существенно используется предыдущая работа (РЖМат, 1955, 869). Затем специально рассматривается вопрос об евклидовых (точнее, гильбертовых) определяемых нормами топологиях линейных пространств; при этом в принятых автором обозначениях «метрическая квад-

ратичная форма» гильбертова пространства записывается в виде $g_{ik}x^i x^k$, $g_{ik} = g_{ki}$, т. е. в точности так же, как и в конечномерном случае. Специальный параграф составляет построение в принятой символике развитого аппарата дифференциального исчисления в нормированных пространствах (Fréchet M., Ann. scient. École norm. supér., 1925, 42, 293—323), включающего основные результаты вариационного исчисления. Наконец, основным для реферируемой работы является определение локально линейного топологического пространства класса r — топологического пространства, покрытого такой системой открытых множеств V_j (индексы j пробегают какое-то множество J), что V_j есть гомеоморфный образ открытого множества E_j топологического векторного пространства T (всюду в работе считающегося нормированным): $\psi_j(E_j) = V_j$, при этом отображение $\psi_j^{-1}\psi_k$ множества $\psi_k^{-1}(V_k \cap V_j)$ в $\psi_j^{-1}(V_k \cap V_j)$ должно быть r-кратно непрерывно дифференцируемо в смысле определенного в T дифференцирования (ср. с определением системы дифференцируемых координат класса r конечномерного пространства в книге Стинрода «Топология косых произведений», М., Изд-во ин. лит., 1953, стр. 27—28). В таких пространствах определяются геометрические объекты и, в частности, тензоры (точнее, тензорные поля), а также основные операции над тензорами; при этом все формулы внешне ничем не отличаются от формул классического тензорного исчисления. И. М. Яглом

3909. Дифференциальная геометрия без аксиомы размерности. II. Риманова геометрия в локально линейных пространствах. Лаугвиц (Differentialgeometrie ohne Dimensionsaxiom. II: Riemannsche Geometrie in lokal-linearen Räumen. Laugwitz Detlef), Math. Z., 1954, 61, № 2, 134—149 (нем.)

Вначале определяется аффинная связность в локально линейных пространствах достаточно высокого класса r (в большинстве случаев вполне достаточно считать $r \geqslant 4$); при этом, как и в обычном случае, связность определяется полем геометрического объекта Γ_{kj}^i с обычным законом преобразования (i, j, k — индексы, приписываемые элементам банахова пространства, определяющего «координаты» в исходном локально линейном пространстве). Далее определяются параллельное перенесение векторов и тензоров и ковариантное дифференцирование тензоров локально линейного пространства аффинной связности; в этой связи обычным образом определяются геодезические линии и риманов тензор такого пространства и доказываются основные свойства тензора Римана (включая тождества Бианки). Специальный параграф посвящен подмногообразиям локально линейного пространства аффинной связности.

Во второй половине работы рассматриваются пространства, которые естественно называть римановыми локально линейными пространствами; они характеризуются заданием в инфинитезимальной окрестности любой точки расстояния между точками P и P', которое в принятой «системе координат» (связанной с отображением этой окрестности в линейное нормированное пространство) выражается положительно определенной квадратичной формой смещения PP' (являющегося элементом линейного пространства). Показывается, что такие пространства являются частным случаем пространств аффинной связности; при этом «коэффициенты связности» Γ_{kj}^i определяются по коэффициентам метрической квадратичной формы g_{ik} обычным образом. Заключительный параграф посвящен теории кривых риманова локально линейного пространства. Здесь показывается, в частности, что геодезические линии такого пространства являются также кратчайшими линиями (в том же смысле, что и в классической дифференциальной геометрии). Наконец, для случая риманова локально линейного пространства бесконечного класса рассматривается аналог формул Френе и доказывается «теорема о натуральных уравнениях». И. М. Яглом

3910. Топологические векторные пространства непрерывных функций. Нахбин (Topological vector spaces of continuous functions. Nachbin Leopoldo), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, 40, № 6, 471—474 (англ.)

Пусть E — вполне регулярное топологическое пространство и R^E — векторное пространство всех непрерывных действительных функций на E с («компактно-открытой») топологией равномерной сходимости на бикомпактных множествах. На E существует слабейшая равномерная (в смысле А. Вейля) структура S, относительно которой все $f \in R^E$ равномерно непрерывны: в ней индексами α окрестностей $V_\alpha(x_0)$ точек $x_0 \in E$ служат всевозможные конечные наборы $\alpha = \{f_1, \ldots, f_n; \varepsilon\}$ функций $f_1, \ldots, f_n \in R^E$ и чисел $\varepsilon > 0$, а $V_\alpha(x_0) = \{x \in E: |f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon\ (i = 1, \ldots, n)\}$.

1. R^E есть t-пространство тогда и только тогда, когда всякое замкнутое вполне ограниченное в структуре S множество из E бикомпактно (E полно в смысле И. Нёймана).

2. R^E ограниченно замкнуто тогда и только тогда, когда E полно в структуре S (в смысле А. Вейля) (По поводу терминов «t-пространство» и «ограниченно замкнуто» см. РЖМат, 1955, 2760). Таким образом, каждое ограниченно замкнутое R^E есть t-пространство. Обратное неверно, так как существуют (даже нормальные) E, полные в смысле И. Нёймана, но не полные в смысле А. Вейля; пример такого E указали автору Гилман и Хенриксен (пример 10.9 их работы (реф. 3929)). Следовательно t-пространство может не быть ограниченно замкнутым, чем решается отрицательно вопрос, поставленный в работе Бурбаки (Bourbaki N., Ann. Inst. Fourier, 1951, 2, 11). Теорема 1 допускает также следующую формулировку: R^E есть t-пространство тогда и только тогда, когда на каждом замкнутом небикомпактном $X \subset E$ неограничена некоторая $f \in R^E$ (т. е. когда каждое $X \subset E$, «псевдокомпактное» по Птаку, бикомпактно). Д. А. Райков

3911. Условия сепарабельности пространств Орлича. Красносельский М. А., Соболев В. И., Изв. АН СССР, сер. матем., 1955, 19, № 1, 59—68

Пусть $M(u)$ — выпуклая N'-функция на $(-\infty, \infty)$ (Birnbaum Z. W., Orlicz W., Studia math., 1931, 3, 1—67; см. также РЖМат, 1956, 582) и пусть $L_M^*(G)$ — пространство Орлича функций на множестве G n-мерного евклидова пространства (РЖМат, 1955, 4536). Показывается, что $L_M^*(G)$ линейно изометрично $L_M^*[(-2^{-1}\operatorname{mes} G,\ 2^{-1}\operatorname{mes} G)]$.

Доказываются теоремы:

1. Если $M(u)$ не удовлетворяет условию (Δ_2) при больших u $(u \geqslant u_0)$, то пространство $L_M^*[(a, b)]$ (a и b конечны или бесконечны) несепарабельно.

2. Если $M(u)$ не удовлетворяет условию (Δ_2) при малых u $(0 \leqslant u \leqslant u_0)$, то $L_M^*[(-\infty, \infty)]$ несепарабельно.

Примечание референта. Теорема 1 другим способом была доказана Орличем (Orlicz W., Bull. internat. Acad. polon. sci. et lettres, 1936, sér. A., № 3—4, 93—107); теорема 2 легко может быть получена из теоремы Орлича о свойствах α', β', γ' про-

странства l^M последовательностей (см. вышеприведенную ссылку, стр. 104). А. А. Конюшков

3912. Геометрические свойства базиса в пространстве Банаха. Фуллертон (Geometric properties of a basis in a Banach space. Fullerton Robert E.), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 109 (англ.)

Приводится достаточное условие того, чтобы последовательность крайних лучей конуса в вещественном банаховом пространстве содержала базис пространства. Это условие может выполняться лишь в пространствах, геометрически близких к пространству ограниченных последовательностей. М. А. Рутман

3913. Заметка об экстремальных точках. Кли (A note on extreme points. Klee V. L.), Amer. Math. Monthly, 1955, 62, № 1, 30—32 (англ.)

Даны три теоремы об экстремальных точках. Первые две известны. Третья формулируется так: Если M является компактом и E — бесконечномерное пространство Банаха, то в E имеется выпуклое компактное подмножество, множество экстремальных точек которого гомеоморфно M. Д. П. Мильман

3914. Об оценке нормы n-линейной симметрической операции. Копец, Муселяк (On the estimation of the norm of the n-linear symmetric operation. Kopeć J., Musielak J.), Studia math., 1955, 15, № 1, 29—30 (англ.)

Пусть $U(x_1, \ldots, x_n)$ — n-линейная симметрическая операция в $X \times \ldots \times X$ (n раз) со значениями в Y (X, Y — банаховы пространства) и пусть $U(x) = U(x, \ldots, x)$. Известно, что

$$\sup_{\|x_1\| \leqslant 1, \ldots, \|x_n\| \leqslant 1} \|U(x_1, \ldots, x_n)\| \leqslant B_n \sup_{\|x\| \leqslant 1} \|U(x)\|,$$

где B_n зависит только от n. Тейлор (Taylor A. E., Tôhoku Math. J., 1938, 44, 302—318) доказал, что $B_n \leqslant n^n / n!$. Авторы показывают, что эта оценка наилучшая. R. Sikorski

3915. Теорема о представлении линейных операций. Кристеску (O teoremă asupra reprezentării operaţiilor liniare. Cristescu Romulus), Comun. Acad. R. P. Romîne, 1955, 5, № 4, 655—659 (рум.; рез. русс., франц.)

Пусть T — произвольное множество, $\mathscr{T}$ — вполне аддитивное семейство подмножеств T, μ — действительная вполне аддитивная мера на $\mathscr{T}$ с $\mu(T) < \infty$, S_T — пространство измеримых функций, конечных почти всюду на T (с естественным порядком), X — нормальное подпространство S_T, имеющее ту же базу. Доказывается, что общий вид (oo)-линейных положительных операций на X со значениями в регулярном K-пространстве Y таков: $U(f) = \int_T f(t)\, dm^*(t)$, где m^* — вполне аддитивная мера на $\mathscr{T}$ со значениями в Y, однозначно определяемая операцией U и абсолютно (t)-непрерывная относительно μ, и интеграл берется в смысле работы автора (Bul. ştiinţ. Acad. R. P. Romîne. Sec. mat. şi fiz., 1952, 4, № 2, 291—310). Отмечается, что эта теорема, в частности, применима к интегральному представлению элементов регулярных K-пространств с обобщенной аддитивной нормой. I. Singer

3916. О дифференциалах Гато и Фреше. Иванов Н. А., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 161—166

Установлены различные предложения о дифференциалах Гато и Фреше (см., например, Вайнберг М. М., Успехи матем. наук, 1952, 7, № 4, 55—102). Некоторые из них справедливы лишь для конечномерных пространств. Основным предложением служит теорема: Для того чтобы дифференциал Гато $V(x_0, h)$ функционала $f(x)$, заданного в произвольном банаховом пространстве E, был линейным, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ удовлетворял следующим условиям:

1) каждому единичному вектору $h \in E$ отвечает такое число $\delta(h) > 0$, что как только $|t| < \delta$, то

$$|f(x_0 + th) - f(x_0)| \leqslant C|t|,$$

где положительное число C не зависит от выбора вектора h;

2) $$\Delta^2_{th_1, th_2} f(x_0) = o(t),$$

где

$$\Delta^2_{h_1, h_2} f(x_0) = f(x_0 + h_1 + h_2) - f(x_0 + h_1) - f(x_0 + h_2) + f(x_0).$$

Доказанные предложения иллюстрируются примерами. М. М. Вайнберг

3917. К вариационной теории нелинейных операторных уравнений. Вайнберг М. М., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 189—190

Тезисы доклада на заседании Московского матем. о-ва.

При применении вариационных методов к доказательству существования решений уравнения

$$AF(x) = x, \qquad (1)$$

где A — самосопряженный, а $F(x)$ — потенциальный операторы, обычные ограничения заключаются в предположении о вполне непрерывности оператора A или о слабой непрерывности функционала, построенного по операторам A и $F(x)$. Рассматривается случай, когда потенциальный оператор $F(x)$ имеет линейный дифференциал Гато. Утверждается, что в этом случае можно отказаться от указанных выше существенных ограничений. Без доказательств формулируются некоторые признаки существования решений уравнения (1) и существования собственных функций оператора $AF(x)$. М. А. Красносельский

3918. Понятие объема для выпуклых тел в гильбертовом пространстве. Лорх (The concept of volume for convex bodies in Hilbert space. Lorch Edgar Raymond), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 136—137 (англ.)

Разработана теория объема для гладких выпуклых тел в гильбертовом пространстве, причем используется введенное ранее определение объема порядка r (РЖМат, 1955, 5298). Г. Ш. Рубинштейн

3919. Устойчивость критических значений четных функционалов на сфере. Красносельский М. А., Матем. сб., 1955, **37**(79), № 2, 301—322

Дано доказательство предложений, сформулированных автором ранее (РЖМат, 1956, 573). Показывается, что методы Л. А. Люстерника, которые были использованы автором для установления точек бифуркации (РЖМат, 1954, 1717), применимы для доказательства устойчивости критических значений некоторых четных функционалов. Для удобства читателя приводятся доказательства некоторых предложений других авторов, которые были опубликованы ранее. М. М. Вайнберг

3920. Сжатия гильбертова пространства и положительно определенные операторные функции. Сёкефалви-Надь (Kontrakciók és pozitív definit operátorfüggvények a Hilbert-térben. Szökefalvi-Nagy Béla), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 2, 189—204 (венг.)

Излагаются результаты двух работ автора (РЖМат, 1954, 2626; 1955, 3298).

3921. Теорема Радона — Никодима в кольцах операторов. Пуканский (Radon — Nikodym-tétel operátorgyürükre. Pukánszky Lajos), Magyar tud. akad. mat. és fiz. oszt. közl., 1954, 4, № 2, 241—242 (венг.)

Краткое изложение результатов работы автора (РЖМат, 1955, 2297). Béla Sz.-Nagy

3922. Новые результаты в теории возмущений. Реллих (New results in the perturbation theory of eigenvalue problems. Rellich F.), Nat. Bur. Standards. Appl. Math. Ser., 1953, № 29, 95—99 (англ.)

Дополнение к обзору результатов по теории возмущений, сделанному автором на Международном математическом конгрессе в Кембридже (Proc. Internat. Congr. Math. Cambrige (Mass.), 1950). Приводятся две основные теоремы Хейнца (Heinz E., Math. Ann, 1951, **123**, 415—438) и дается простое доказательство следующей теоремы, содержащей вариант одного из неравенств Хейнца: Если 1) A и Q — заданные и симметричные в области D линейные операторы, 2) замыкание A есть самосопряженный неотрицательный оператор, 3) для всех $u \in D$ справедливо неравенство $\|Qu\| \leqslant \|Au\|$, то для всех $u \in D$ имеет место неравенство $|(Qu, u)| \leqslant (Au, u)$. Приведен пример, показывающий, что условие 2) существенно. М. К. Гавурин

3923. К теории неопределенных теплицевых форм. Иохвидов И. С., Докл. АН СССР, 1955, **101**, № 2, 213—216

Основной результат: Пусть бесконечная последовательность $c_0, c_1, c_2, \ldots$ обладает тем свойством, что при достаточно больших натуральных n теплицева форма

$$\sum_{p,\,q=0}^{n} c_{p-q}\,\xi_p\,\overline{\xi}_q \quad (c_{-p} = \overline{c}_p;\ p = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

содержит точно k положительных квадратов. Тогда существует линейный конечноразностный оператор L порядка $2k$, содержащий разности четных порядков и такой, что все эрмитовы формы $\sum_{p,\,q=0}^{n} L(c_{p-q})\,\xi_p\,\overline{\xi}_q$ неотрицательны. При построении оператора L, действующего на индекс p, используется ряд свойств унитарных операторов U в пространствах с индефинтной метрикой конечного ранга k (скалярный квадрат вектора в пространстве задается квадратичной формой с k положительными и бесконечным числом отрицательных квадратов), в частности, существование у них k-мерных инвариантных просранств определенной структуры. Сформулированная теорема позволяет получить для c_p интегральные представления, обобщающие известные формулы тригонометрической проблемы моментов (соответственно — для степеней унитарного оператора U^p — формулы, обобщающие спектральные разложения унитарного оператора в гильбертовом пространстве).

Отмечается, что при $k = 1$ такие же интегральные представления коэффициентов c_p и их единственность были иным методом установлены референтом, который их использовал для получения континуального аналога — интегрального представления длины хорды винтовой линии в пространстве Лобачевского любой (конечной или бесконечной) размерности (Успехи матем. наук. 1950, 5, № 2, 180—190). М. Г. Крейн

3924. Разложение по собственным функциям дифференциальных и других операторов. Гельфанд И. М., Костюченко А. Г., Докл. АН СССР, 1955, **103**, № 3, 349—352

Пусть Φ — линейное топологическое пространство бесконечно дифференцируемых функций, в которое введена топология при помощи счетного числа норм; Φ' — пространство линейных функционалов над Φ; (φ, ψ) — скалярное произведение в Φ; $\overline{\Phi}$ — пополнение Φ по скалярному произведению в Φ. Пусть A — оператор, определенный для всех $\varphi \in \Phi$, причем $A\varphi \in \overline{\Phi}$. Предполагается, что: 1) $(A\varphi, \psi) = (\varphi, A\psi)$, 2) отображение $A\varphi \to \overline{\Phi}$ непрерывно и 3) A допускает расширение до гипермаксимального оператора $\overline{A}$. Если $A\varphi \in \Phi$, то сопряженный оператор A' переводит Φ' в себя. В этом случае $\psi \in \Phi'$ называется обобщенной собственной функцией, если $A'\psi = \lambda\psi$. В общем случае обобщенная функция $\psi \in \Phi'$ определяется с помощью дифференцирования спектральной функции оператора A. Дается краткое изложение доказательства следующей общей теоремы разложения: определенный выше оператор A имеет полную систему обобщенных собственных функций.

Рассматривается также разложение в обобщенный интеграл Фурье, соответствующее разложению оператора A по простым спектрам. Для эллиптического уравнения всякая обобщенная собственная функция есть настоящее решение. Для эллиптического оператора

$$\sum a_{k_1 \ldots k_n}(x)\,\frac{\partial^{m_i}}{\partial x_1^{k_1} \ldots \partial x_n^{k_n}}, \qquad (1)$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n), \quad -\infty \leqslant x_i \leqslant \infty$$

формулируется следующая теорема: Если коэффициенты оператора (1) удовлетворяют неравенству

$$|a_{k_1, \ldots k_n}(x)| < c(1 + |x|^{\beta}), \text{ где } |x|^2 = x_1^2 + \ldots + x_n^2,$$

то этот оператор имеет полную систему собственных функций $u(x, \lambda)$, у которых интеграл некоторого порядка r растет не быстрее, чем $c\,|x|^{\beta+n/2+\varepsilon}$.

Рассмотрены также применения общей теоремы разложения к задаче С. Л. Соболева и Р. А. Александряна и к динамическим системам. Б. М. Левитан

3925. О разложениях по собственным функциям. Маутнер Ф. И., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 4, 127—132

Русский перевод статьи автора (РЖМат, 1953, 812).

3926. Вычисление собственных значений и собственных функций наблюдаемых операторов на компактной группе. Фантапье (Calcolo degli autovalori e delle autofunzioni degli operatori osservabili su un gruppo compatto. Fantappiè Luigi), Arch. Math., 1954, 5, № 4—6, 292—300 (итал.)

Вычисление собственных значений и собственных функций «физических» операторов на топологической компактной группе. Фантапье (Calcolo degli autovalori e autofunzioni degli operatori «fisici» su un gruppe topologico compatto. Fantappiè Luigi), Proc. Internat. Congr. Math. 1954, 2, Amsterdam, 1954, 98—100 (итал.)

Аналитический линейный оператор $K\varphi = \varphi_1$, определенный в пространстве аналитических функций на вещественной группе Ли G^r, называется наблюдаемым, если $K\varphi(x) = F_t[\varphi(t \cdot x)]$, где F — линейный функционал (Fantappiè L., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1952, **12**, № 3,5), и объективным, если $KT\varphi = TK\varphi$ для любого T из G^r. Наблюдаемый объективный оператор называется физическим. Рассматриваются физические операторы K, определенные в пространстве систем функций $\{\varphi_1(x), \ldots, \varphi_\mu(x)\}$ Вычисление собственных значений и собственных функций таких операторов в случае, когда группа G^r компактна и выполняются некоторые дополнительные условия, касающиеся равномерной сходимости рядов по матричным элементам неприводимых унитарных представлений группы G^r, сводится к решению алгебраических уравнений и систем линейных алгебраических уравнений. Неизвестными в этих системах являются коэффициенты Фурье разложений собственных функций по матричным элементам. Характеристический определитель системы разлагается в произведение

определителей, порядки которых связаны с разложением некоторых кронекеровских произведений представлений группы на неприводимые представления. В частности, если эти произведения разлагаются на различные представления, то можно обойтись без решения алгебраического уравнения. Н. Я. Виленкин

3927. Сверхстационарный вариационный метод. Кикута (Super-stationary variational method. Kikuta Takashi), Progr. Theoret. Phys., 1954, 12, № 1, 10—16 (англ.)

См. РЖФиз, 1956, 6137

3928. Заметка об обратных элементах в топологических кольцах. Барот (Poznámka o inversních prvcích v topologických okruzích. Barot Jiří), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 2, 241—243 (чеш.)

3929. О кольцах непрерывных функций. Гилман, Хенриксен (Concerning rings of continuous functions. Gillman Leonard, Henriksen Melvin), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, 77, № 2, 340—362 (англ.)

Изучаются кольца $C(X)$ всех непрерывных действительных функций, определенных на вполне регулярном топологическом пространстве X. В первой половине статьи изучается класс пространств X, называемых авторами P-пространствами. Они определяются тем, что каждый примарный идеал кольца $C(X)$ (понимаемый в чисто алгебраическом смысле) является максимальным. P-пространства являются естественным обобщением дискретных пространств. Доказываются следующие необходимые и достаточные условия для того, чтобы X было P-пространством:

1) Множества, где функции из $C(X)$ обращаются в нуль, являются открытыми.

2) Для всякой функции $f \in C(X)$ найдется функция $g \in C(X)$ такая, что $fgf=f$ (регулярность кольца $C(X)$).

3) Счетное пересечение открытых множеств является открытым.

4) Всякий идеал в $C(X)$ является пересечением содержащих его максимальных идеалов.

Даются условия, когда P-пространство оказывается дискретным и конечным.

Строятся примеры линейно упорядоченных P-пространств. Во второй половине статьи рассматриваются Q-пространства, определяющиеся тем, что поле вычетов $C(X)/M$, где M — «несобственный» максимальный идеал (т. е. максимальный идеал, который не может быть представлен как совокупность всех функций, обращающихся в нуль в некоторой фиксированной точке пространства X), не является полем действительных чисел. Два Q-пространства X и Y изоморфны тогда и только тогда, когда кольца $C(X)$ и $C(Y)$ изоморфны.

Приводится ряд ранее известных результатов о Q-пространствах. Доказывается, что всякое линейно упорядоченное Q-пространство является паракомпактным, т. е. из всякого его покрытия открытыми множествами можно выделить локально конечное покрытие (определение Дьёдонне), а любое линейно упорядоченное пространство — счетнопаракомпактным. Ю. А. Шрейдер

3930. Мультипликативные полугруппы непрерывных функций на компактном пространстве. Юд (Multiplicative semi-groups of continuous functions on a compact space. Yood Bertram), Duke Math. J., 1955, 22, № 3, 383—392 (англ.)

Устанавливается ряд предложений относительно мультипликативных свойств непрерывных функций на бикомпакте $\mathfrak{M}$, из которых, в частности, получается следующее предложение: Пусть в идеале I нормированной регулярной алгебры A для любых двух элементов $f_1 \in I$, $f_2 \in I$ имеется последовательность $\{e_k\} \in I$ такая, что $f_1 e_k \to f_1$, $f_2 e_k \to f_2$. Тогда, если алгебра A плотна в соответствующем пространстве непрерывных функций $C(\mathfrak{M})$, замыкание идеала I является пересечением максимальных идеалов. Автор не приводит ни одного примера. Г. Е. Шилов

3931. Некоторые замечания о разложениях Фурье. Хартман (Quelques remarques sur les expansions de Fourier. Hartman S.), Studia math., 1954, 14, № 2, 200—208 (франц.)

Рассматривается полное линейное нормированное кольцо R, состоящее из некоторых последовательностей комплексных чисел с умножением по формуле $\{a_n\}\{b_n\} = \{a_n b_n\}$. Предполагается, что все последовательности с конечным числом отличных от нуля членов принадлежат R и образуют в R плотное подмножество.

Теорема 1. Каждый гомоморфизм h кольца R в поле комплексных чисел Z имеет вид $h(\{a_n\}) = a_\mu$, где $\{a_n\} \in R$ и μ — натуральное число, характеризующее гомоморфизм h.

Если кольцо R не имеет единичного элемента, то известным способом можно перейти к кольцу R^* с единицей e, элементами которого являются формальные суммы $Ce + x$, где C — число и $x \in R$, и $\|Ce + x\| = |C| + \|x\|$.

Теорема 2. Гомоморфизмы кольца R^* в Z имеют вид $h(Ce + \{a_n\}) = C$ или $h(Ce + \{a_n\}) = C + a_\mu$ (μ — произвольное фиксированное).

Доказывается, что множество B почти периодических функций Безиковича приводит к кольцу указанного выше типа. При этом фиксируется произвольное (счетное) множество Λ показателей Фурье λ_n и рассматриваются функции $f \in B$ с разложениями вида $f(t) \sim \sim \sum a_n e^{i\lambda_n t}$. Элементами кольца являются последовательности коэффициентов $\{a_n\}$. Норма определяется формулой $\|\{a_n\}\| = M_t(|f(t)|) = \lim_{T\to\infty} T^{-1} \int_0^T |f(t)|\,dt$. Произведение последовательностей $\{a_n b_n\}$ соответствует свертке функций f и g. Это кольцо не имеет единичного элемента. Согласно автору, последовательности коэффициентов Фурье для многих классов функций, например, функций B^p $(p > 1)$ Безиковича, S^p $(p \geqslant 1)$ Степанова, $L^p(0, 2\pi)$ и других, образуют кольца R указанного выше типа.

Используя одну теорему И. М. Гельфанда, автор доказывает утверждение: При предположении, что $c \neq 0$ и $c + a_n \neq 0$, последовательность $\{a_n/(c + a_n)\}$ (или $\{\sqrt{c + a_n} - \sqrt{c}\}$) является последовательностью коэффициентов Фурье функции класса B, если последовательность $\{a_n\}$ обладает этим свойством. Аналогичный результат получается для других указанных выше функциональных классов.

В заключение даются некоторые приложения формулы Гельфанда $\lim_n \|x^n\|^{1/n} = \sup_h |h(x)|$, где x — элемент кольца и h — любой гомоморфизм с комплексными значениями.

Референт заметил следующие неточности:

1. Кольцо функций, измеримых и ограниченных в $(0, 2\pi)$ (стр. 205), не будет рассматриваемого типа, так как тригонометрические полиномы не образуют плотного множества. Заметим, однако, что теоремы о форме гомоморфизма и их следствия верны, но нуждаются в специальном доказательстве (мы должны использовать тот факт, что свертка $x * x$ непрерывна для каждой ограниченной функции x).

2) В классе периодических функций, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$

(стр. 206), автор вводит норму $\sup_t |f(t)|$. Но в этом случае пространство не будет полным. При «естественной» норме $|f(0)| + \sup_{t_1, t_2} |f(t_1) - f(t_2)| \cdot |t_1 - t_2|^{-\alpha}$ возникают те же затруднения, что и в пункте 1.

3. Равномерная сходимость коэффициентов Фурье не влечет сходимости в метрике $L(0, 2\pi)$.

C. Ryll-Nardzewski

3932. О полях отношений, порождаемых псевдонормированными кольцами. Урбаник (On quotient-fields generated by pseudonormed rings. Urbanik K.), Studia math., 1955, **15**, № 1, 31—33 (англ.)

Пусть R — комплексное коммутативное псевдонормированное кольцо (т. е. линейное кольцо с топологией, определяемой последовательностью псевдонорм $\|x\|_n$, $n = 1, 2, \ldots$, таких, что $\|xy\|_n \leqslant \|x\|_n \cdot \|y\|_n$) без делителей нуля. Пусть Q — поле отношений, получаемое из R обычным алгебраическим методом. Следуя Микусинскому (Mikusiński J., Studia math., 1950, **11**, 62), говорим, что последовательность $a_n \in Q$ сходится к $a \in Q$, если существует элемент $x \in R$ такой, что $xa_n \to xa$ в R. Автор доказывает, что если так определенная сходимость в Q является топологической (т. е. может быть определена с помощью окрестностей в Q с первой аксиомой счетности), то Q изоморфно и гомеоморфно с полем комплексных чисел.

R. Sikorski

3933. Об упорядоченности и коммутативности B^*-алгебр. Фукамия, Мисоноу, Такеда (On order and commutativity of B^*-algebras. Fukamiya M., Misonou Y., Takeda Z.), Tôhoku Math. J., 1954, **6**, № 1, 89—93 (англ.)

Рассматривается нормированное кольцо A с инволюцией $x \to x^*$, удовлетворяющей условию $\|x^*x\| = \|x\|^2$ (в терминологии автора, B^*-алгебра), и его изоморфное отображение на равномерно замкнутое кольцо ограниченных операторов в гильбертовом пространстве. Если H — множество всех эрмитовых элементов A, а D — множество его положительных элементов, то в H вводится отношение $a \leqslant b$, если $b - a \in D$. По определению, A обладает свойством разложимости, если для любого a такого, что $0 \leqslant a \leqslant b + c$, где b и c положительны, существуют a_1, a_2 такие, что $a = a_1 + a_2$, $a_1 \leqslant b$, $a_2 \leqslant c$. Основной результат:

Теорема 1. B^*-алгебра, содержащая единицу и обладающая свойством разложимости, необходимо коммутативна.

Приведены три доказательства теоремы 1, в том числе — опирающееся на следующую теорему:

Теорема 2. Сопряженное пространство вещественного банахова пространства H всех эрмитовых элементов B^*-алгебры A является банаховой структурой тогда и только тогда, когда A коммутативна.

И. С. Иохвидов

3934. О регулярно выпуклой оболочке множества в сопряженном пространстве Банаха. Томита (On the regularly convex hull of a set in a conjugate Banach space. Tomita Minoru), Math. J. Okayama Univ., 1954, **3**, № 2, 143—145 (англ.)

Пусть $\mathbf{E}$ — вещественное пространство Банаха, $\overline{\mathbf{E}}$ — его сопряженное пространство, $\mathfrak{X}$ — ограниченное множество в $\overline{\mathbf{E}}$, замкнутое в смысле слабой топологии в $\overline{\mathbf{E}}$. Доказывается, что минимальное регулярно выпуклое множество в $\overline{\mathbf{E}}$, содержащее $\mathfrak{X}$, есть совокупность всех функционалов вида $F(x) = \int_{\mathfrak{X}} f(x)\, d\mu(f)$, где μ пробегает все неотрицательные борелевские меры на $\mathfrak{X}$, удовлетворяющие условию $\mu(\mathfrak{X}) = 1$.

Если, в частности, само $\mathfrak{X}$ — регулярно выпуклое ограниченное множество в $\overline{\mathbf{E}}$, $\mathfrak{E}$ — множество всех его экстремальных точек, $\overline{\mathfrak{E}}$ — замыкание $\mathfrak{E}$ в слабой топологии, то всякий функционал $F \in \mathfrak{X}$ представляется в виде $F(x) = \int_{\overline{\mathfrak{E}}} f(x)\, d\mu(f)$, где μ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{\mathfrak{E}}$, удовлетворяющая условию $\mu(\overline{\mathfrak{E}}) = 1$.

Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо ограниченных операторов в гильбертовом пространстве, замкнутое в смысле нормы оператора и содержащее вместе с каждым оператором сопряженный оператор, а $\mathbf{R}^H$ — совокупность всех эрмитовых элементов кольца $\mathbf{R}$. Применяя предыдущий результат к $\mathbf{R}^H$, автор получает представление всякого положительного функционала $F(x)$ в $\mathbf{R}$ в виде $F(x) = \int_{\overline{\mathfrak{M}}} f(x)\, d\mu(f)$, где $\mathfrak{M}$ — совокупность всех неразложимых нормированных (т. е. удовлетворяющих условию $f(e) = 1$) положительных функционалов $f(x)$ в $\mathbf{R}$, $\overline{\mathfrak{M}}$ — замыкание $\mathfrak{M}$ в смысле слабой топологии в $\overline{\mathbf{R}^H}$, а μ — неотрицательная борелевская мера на $\overline{\mathfrak{M}}$.

М. А. Наймарк

3935. Представления операторных алгебр. Томита (Representations of operator algebras. Tomita Minoru), Math. J. Okayama Univ., 1954, **3**, № 2, 147—173 (англ.)

Дается наиболее полное и общее по сравнению с до сих пор известными решение вопроса о разложении заданного кольца $\mathbf{R}$ операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ на неприводимые кольца, причем сепарабельность $\mathfrak{H}$ не предполагается.

Пусть $\mathbf{R}$ — кольцо ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}$, замкнутое в смысле нормы оператора, содержащее единичный оператор и содержащее вместе с каждым оператором A также сопряженный оператор A^*. Как известно, всякий положительный функционал $f(A)$ в $\mathbf{R}$ порождает циклическое представление $A \to A_f$ кольца $\mathbf{R}$ в некотором пространстве $\mathfrak{H}_f$ такое, что $f(A) = (A_f \xi_f^0, \xi_f^0)$, где ξ_f^0 — циклический вектор представления. Кольцо $\mathbf{E}$ операторов в $\mathfrak{H}_f$, также замкнутое в смысле нормы оператора, содержащее единицу и A^* вместе с A, автор называет диагональным в $\mathfrak{H}_f$, если $(\mathbf{R}_f \cup \mathbf{E})' = \mathbf{E}$; при этом $\mathbf{R}_f$ означает образ кольца $\mathbf{R}$ при гомоморфизме $A \to A_f$, $\mathbf{R}_f \cup \mathbf{E}$ — минимальное замкнутое по норме кольцо операторов, порожденное кольцами $\mathbf{R}_f$ и $\mathbf{E}$, а $(\mathbf{R}_f \cup \mathbf{E})'$ — кольцо всех ограниченных линейных операторов в $\mathfrak{H}_f$, перестановочных со всеми операторами из $\mathbf{R}_f \cup \mathbf{E}$. Один из основных результатов состоит в следующем:

I. Пусть $\mathfrak{M}$ — совокупность всех неразложимых положительных функционалов f в $\mathbf{R}$, удовлетворяющих условию $f(1) = 1$, а $\overline{\mathfrak{M}}$ — замыкание $\mathfrak{M}$ в смысле слабой топологии в $\overline{\mathbf{R}^H}$ (см. реф. 3934). Для заданных положительного функционала F в $\mathbf{R}$ и диагонального кольца в $\mathfrak{H}_F$ существует борелевская мера μ на $\overline{\mathfrak{M}}$, обладающая следующими свойствами: 1) $\overline{\mathfrak{M}} - \mathfrak{M}$ есть множество μ-меры нуль; 2) если $\mathbf{B}(\overline{\mathfrak{M}})$ означает совокупность всех μ-измеримых существенно ограниченных функций $x(f)$ на $\overline{\mathfrak{M}}$ с нормой $|x| = \operatorname{ess\,sup} |x(f)|$ и инволюцией $x^*(f) = \overline{x(f)}$, то для каждой функции $x(f) \in \mathbf{B}(\overline{\mathfrak{M}})$ существует оператор $C_x \in \mathbf{E}$ такой, что

$$(A_F C_x \xi_F^0, \xi_F^0) = \int_{\overline{\mathfrak{M}}} x(f) f(A)\, d\mu; \qquad (1)$$

3) соответствие $x \to C_x$ есть полный изоморфизм между $\mathbf{B}(\overline{\mathfrak{M}})$ и $\mathbf{E}$.

Положив в (1) $x(f) \equiv 1$, получим разложение

$$F(A) = \int_{\mathfrak{K}} f(A)\, d\mu, \qquad (2)$$

где $\mathfrak{K}$ — минимальное замкнутое множество в $\mathfrak{M}$ такое, что $\mu(\mathfrak{K}) = \mu(\mathfrak{M})$; формулу (2) автор называет диагональным разложением функционала $F(A)$.

При доказательстве теоремы I используются результаты предыдущей статьи автора (реф. 3934), а также понятие приводимого функционала. Положительный функционал $F(A)$ в R называется приводимым, если всякий функционал $\varphi(A)$, ему подчиненный, представляется в виде $\varphi(A) = F(AB)$, где B принадлежит центру Z кольца R. Положительный функционал $F(A)$ в R называется центрально приводимым, если его сужение на Z есть приводимый функционал. Оказывается, что положительный функционал $F(A)$ приводим тогда и только тогда, когда он центрально приводим и представляется в виде $F(A) = \int_{\mathfrak{D}} f_M(A)\, d\mu$, где μ — борелевская мера на пространстве $\mathfrak{M}$ максимальных идеалов кольца Z, $\mathfrak{D}$ — минимальное замкнутое множество в $\mathfrak{M}$, удовлетворяющее условию $\mu(\mathfrak{D}) = \mu(\mathfrak{M})$, $f_M(A)$ — положительный функционал в R, являющийся непрерывной функцией от $M \in \mathfrak{D}$ при каждом $A \in \mathrm{R}$, и почти все (в смысле меры μ) $f_M(A)$ неразложимы.

Теорема I применяется для получения разложения кольца R на неприводимые кольца, причем разложение кольца понимается в смысле следующих определений.

Пусть T — локально бикомпактное хаусдорфово пространство с неотрицательной борелевской мерой μ и пусть каждой точке $t \in T$ отвечает гильбертово пространство $\mathfrak{H}_t$. Множество $\mathfrak{S}$ вектор-функций $\xi = \xi(t)$, $\xi(t) \in \mathfrak{H}_t$ называется базой топологического прямого интеграла, если: 1) при любых $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$ числовая функция $(\xi(t), \eta(t))$ непрерывна на T; 2) $\mathfrak{S}$ линейно, т. е. из $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$ следует, что $\alpha\xi + \beta\eta \in \mathfrak{S}$; 3) если $\xi \in \mathfrak{S}$ а $x(t)$ — непрерывная числовая функция, то также $x(t)\,\xi(t) \in \mathfrak{S}$; 4) множество $\{\xi(t),\ \xi \in \mathfrak{S}\}$ плотно в $\mathfrak{H}_t$.

Пополнение $\mathfrak{S}$ при скалярном произведении $(\xi, \eta) = \int_T (\xi(t), \eta(t))\, d\mu$ называется топологическим прямым интегралом пространств $\mathfrak{H}_t$ по мере μ и обозначается через $\int_T \mathfrak{H}_t \sqrt{d\mu}$.

Далее ограниченный линейный оператор A в $\int_T \mathfrak{H}_t \sqrt{d\mu}$ называется прямым интегралом ограниченных линейных операторов A_t в $\mathfrak{H}_t$ и обозначается через $\int \oplus A_t$, если $A\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$ и $(A\xi)(t) = A_t \xi(t)$ для всех $\xi \in \mathfrak{S}$ и всех $t \in T$. Наконец кольцо R в $\int \mathfrak{H}_t \sqrt{d\mu}$ называется прямым интегралом колец R_t в $\mathfrak{H}_t$, если каждый оператор $A \in \mathrm{R}$ представляется в виде $A = \int \oplus A_t$ и если каждое кольцо R_t есть образ кольца R при гомоморфизме $A \to A_t$. Разложение данного кольца R на циклические кольца и применение к каждому кольцу диагонального разложения соответствующего положительного функционала приводят к следующему результату.

II. Пусть R — замкнутое в смысле нормы оператора кольцо ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, содержащее единицу и содержащее вместе с каждым оператором A сопряженный оператор A^*. Тогда $\mathfrak{H}$ можно так реализовать в виде топологического прямого интеграла $\mathfrak{H} = \int_T \mathfrak{H}_t \sqrt{d\mu}$, что $\mathrm{R} = \int \oplus \mathrm{R}_t$, где почти все (в смысле меры μ) R_t неприводимы.

Применение теоремы II к кольцу $\mathrm{R} \cup \mathrm{R}'$ дает разложение колец R и R′ на факторы, полученное Нёйманом другим путем для случая сепарабельного пространства (Neumann J. v., Ann. Math., 1949, **50**, 401—485); применение теоремы II к кольцу $\mathrm{R} \cup \mathrm{E}$, где $(\mathrm{R} \cup \mathrm{E})' = \mathrm{E}$, приводит к разложению кольца R на неприводимые кольца, при котором E переходит в кольцо всех операторов $\int \oplus x(t)\, 1_t$, где $x(t)$ пробегает все ограниченные непрерывные числовые функции на T.

М. А. Наймарк

3936. О свертывании мер. Дьёдонне (Sur le produit de composition Dieudonné Jean), Compositio math., 1954, **12**, № 1, 17—34 (франц.)

Пусть G — локально компактная абелева группа; $L^1(G)$ — пространство всех абсолютно интегрируемых по мере Хара функций на G; Φ_0 — пространство комплексных непрерывных функций на G, имеющих компактный носитель, с нормой $\| f \| = \sup_{x \in G} | f(x) |$; $\overline{\Phi}_0$ — пространство комплексных непрерывных функций на G, обращающихся в нуль на бесконечности, с той же нормой; Φ_{I} — пространство комплексных непрерывных ограниченных функций на G; Φ'_{I} — пространство равномерно непрерывных ограниченных функций на G; Φ_{IV} — пространство борелевских ограниченных функций на G. Пусть $\mathfrak{M}^1(G)$ — пространство комплексных ограниченных мер на G. Это пространство может рассматриваться как пространство функционалов для $\overline{\Phi}_0$ или для Φ_0. Соответственно этому говорят о сильной или о грубой сходимостях мер. $L^1(G)$ можно рассматривать как подпространство в $\mathfrak{M}^1(G)$: $f(x)\, dx = d\mu(x)$. Если $\lambda_n \to \lambda$ как меры в Φ_{I} (соответственно Φ_{I}, Φ_{IV}), а $\mu_n \to \mu$ как меры в $\overline{\Phi}_0$ (соответственно Φ_{I}, Φ_{IV}), то $\lambda_n * \mu_n$ (свертка мер λ_n и μ_n) стремятся к $\lambda * \mu$ как мерам в $\overline{\Phi}_0$ (соответственно Φ_{I}, Φ_{IV}). Если λ_n стремятся к λ как меры в Φ'_{I} и $f_n \in L^1(G)$ сильно сходятся к $f \in L^1(G)$, то $\lambda_n * f_n$ сильно сходятся к $\lambda * f$. Эти теоремы перестают быть справедливыми при замещении последовательностей мер несчетными фильтрами. Если $\{\mu_n\}$ — последовательность положительных ограниченных мер на G и для каждой функции f из Φ'_{I} последовательность $\{\mu_n(f)\}$ имеет конечный предел $\mu(f)$, то $\mu_n \to \mu$ как меры в Φ_{I}. Указываются аналогичные теоремы, связанные с преобразованием Фурье. Н. Я. Виленкин

3937. О континуальном аналоге леммы Шура. Наймарк М. А., Докл. АН СССР, 1954, **98**, № 2, 185—188

Рассматривается совокупность R функций $a(\alpha)$, заданных на локально бикомпактном пространстве $\mathfrak{A}$, значениями которых являются вполне непрерывные операторы в фиксированном гильбертовом пространстве H, непрерывных на $\mathfrak{A}$ и удовлетворяющих условию $\lim_{\alpha \to \infty} \| a(\alpha) \| = 0$. Введя в R естественным образом алгебраические операции, инволюцию и норму, можно превратить R в $*$-полное нормированное кольцо с инволюцией $*$. Формулируется теорема, обобщающая известный результат о коммутативных кольцах:

Пусть R_1 — замкнутое подкольцо с инволюцией кольца R такое, что 1) при любом $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ представление $a(\alpha) \to a(\alpha_0)$ кольца R_1 неприводимо; 2) при любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathfrak{A}$, $\alpha_1 \neq \alpha_2$, представления $a(\alpha) \to a(\alpha_1)$, $a(\alpha) \to a(\alpha_2)$ кольца R_1 неэквивалентны. Тогда $R_1 = R$.

Пусть теперь на $\mathfrak{A}$ задана мера $\mu(\Delta)$ и пусть $\mathfrak{H}$ — совокупность всех измеримых вектор-функций $\xi = \{\xi_\alpha\}$ со значениями из H и удовлетворяющих условию $\int \| \xi_\alpha \|^2\, d\mu(\Delta_\alpha) < \infty$. $\mathfrak{H}$ есть гильбертово пространство; автор называет его континуальной прямой суммой (континуума) экземпляров пространства H и обозначает через $\int_{\mathfrak{A}} H d\mu(\Delta_\alpha)$. Элементы $A = a(\alpha)$ кольца R можно рассматривать как ограниченные операторы

в $\mathfrak{H}$: $A\{\xi_\alpha\} = \{a(\alpha)\xi_\alpha\}$. Формулируется континуальный аналог леммы Шура:

Пусть задано $*$-представление $x \to a_x(\alpha)$ $*$-полного кольца M в пространстве $\mathfrak{H}$ с помощью операторов из R со следующими свойствами: 1) при каждом фиксированном $\alpha = \alpha_0$ представление $x \to a_x(\alpha_0)$ кольца M в пространстве H неприводимо; 2) если $\alpha_1 \neq \alpha_2$, то представления $x \to a_x(\alpha_1)$ и $x \to a_x(\alpha_2)$ неэквивалентны. Тогда всякий оператор B в $\mathfrak{H}$, перестановочный со всеми операторами $A_x \subset \{a_x(\alpha)\}$, $x \in M$, имеет вид $\lambda(\alpha)1$, где $\lambda(\alpha)$ — измеримая существенно ограниченная числовая функция, а 1 — единичный оператор в H.

Следствия. Пусть $\mathfrak{M}$ — подпространство в $\mathfrak{H}$, инвариантное относительно всех $a_x(\alpha)$. Тогда 1) $\mathfrak{M}$ есть совокупность всех векторов $\xi = \{\xi_\alpha\}$ в H, удовлетворяющих условию $\xi_\alpha = 0$ для почти всех $\alpha \in \Delta$, где Δ — фиксированное измеримое множество в $\mathfrak{A}$; 2) если $\mathfrak{M}$ содержит вектор $\xi = \{\xi_\alpha\}$, удовлетворяющий условию $\xi_\alpha \neq 0$ для почти всех α, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$. Полученный результат применяется к аналогу теоремы Планшереля. Пусть X — основная серия унитарных представлений классической группы Ли $\mathfrak{G}$ и $g \to T_g^\chi$ обозначает χ-е представление группы $\mathfrak{G}$. Сопоставим функции $x(g)$ на $\mathfrak{G}$ с интегрируемым квадратом ядро $K(u_1, u_2, \chi)$ оператора $\int x(g) T_g^\chi dg$. Согласно аналогу формулы Планшереля этим устанавливается изометрическое отображение пространства $L_2[\mathfrak{G}]$ функций $x(g)$ с интегрируемым квадратом в пространство $\mathfrak{H}_k$ функций $K(u_1, u_2, \chi)$ с подходящим скалярным произведением. Доказывается, что образ $L_2[\mathfrak{G}]$ при таком отображении есть все пространство $\mathfrak{H}_k$. М. И. Граев

3938. Об одном классе непрерывных положительно определенных функций на локально компактной группе. Такэноути (Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact. Takenouchi Osamu), Math. J. Okayama Univ., 1955, 4, № 2, 143—173 (англ.)

Пусть дано унитарное представление $g \to V_g$ локально компактной группы G в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ и пусть $\mathbf{M}$ — наименьшее замкнутое относительно равномерной сходимости кольцо операторов с инволюцией, содержащее все операторы $S_\xi = \int_G \xi(g) V_g dg$ ($\xi(g) \in L^1(G)$). Пусть $p(g)$ — непрерывная положительно определенная функция на G. Поставим в соответствие $p(g)$ функционал, отображающий S_ξ в $\int_G \xi(g) p(g) dg$. Для того чтобы этот функционал можно было распространить на все $\mathbf{M}$ как положительно определенную функцию на $\mathbf{M}$, необходимо и достаточно, чтобы $p(g)$ была пределом равномерно сходящейся на любом компакте последовательности конечных сумм непрерывных положительно определенных на G функций вида $(V_g x, x)$, $x \in \mathfrak{H}$.

Пусть G — локально компактная группа с компактной фактор-группой по компоненте единицы. Для того чтобы можно было приблизить равномерно на всех компактах функцию, тождественно равную 1, функциями вида $\int_G x(gh)\overline{x(h)}\,dh$, где $x(h)$ — непрерывная функция, обращающаяся в нуль вне некоторого компактного множества, необходимо и достаточно, чтобы G была группой типа (C) (Iwasawa K., Ann. Math., 1949, 50, 507—558). Отсюда следует, в частности, что существуют представления полупростых групп Ли, не возникающие при разложении регулярного представления (этот результат принадлежит И. М. Гельфанду и М. А. Наймарку (Изв. АН СССР, сер. матем., 1947, 11, 411—504)). Н. Я. Виленкин

3939. О формуле Планшереля для правоинвариантных функций на полупростой группе Ли. Харишчандра (On the Plancherel formula for the right-invariant functions on a semisimple Lie group. Harish-Chandra), Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 1954, 40, № 3, 200—204 (англ.)

Пусть G — связная полупростая группа Ли, K — полный прообраз в G максимальной компактной подгруппы ее присоединенной группы. Рассматривается пространство $L_2(G/K)$ функций на G/K с интегрируемым квадратом относительно инвариантной меры на G/K. Решается задача о разложении естественного представления σ группы G в пространстве $L_2(G/K)$. При этом делается несущественное допущение, что центр группы G конечен и подгруппа K компактна.

Обозначим через $\mathfrak{E}$ совокупность всех классов эквивалентных неприводимых унитарных представлений π группы G, содержащих единичное представление подгруппы K. Пусть F — спектр семейства перестановочных гипермаксимальных операторов τ_i, $1 \leqslant i \leqslant l_+$, рассматриваемый как подмножество действительного евклидова пространства E размерности l_+, и пусть P_λ — соответствующее разложение единичного оператора, так что $\tau_i = \int_F \lambda_i\, dP_\lambda$ ($1 \leqslant i \leqslant l_+$), где λ_i — i-я координата произвольной точки $\lambda \in E$. Тогда существует взаимно однозначное отображение $\lambda \to \omega(\lambda)$ множества F на подмножество $\mathfrak{E}_0 \subset \mathfrak{E}$, обладающее следующим свойством: Если π — представление из $\omega(\lambda)$ и ψ — вектор в соответствующем пространстве представления такой, что $|\psi| = 1$ и $\pi(u)\psi = \psi$ $(u \in K)$, то $\lambda_i = (\psi, \pi(z_i)\psi)$, $1 \leqslant i \leqslant l_+$. Положим $\varphi_\lambda(x) = (\psi, \pi(x)\psi)$ $(x \in G)$. Тогда существует однозначно определяемая (регулярная) мера Бореля $d\lambda$ на F такая, что $d(f, P_\lambda f) = |\int f(x) \times \varphi_\lambda(x)\, dx|^2 d\lambda$ для любой функции f, непрерывной, равной нулю вне некоторого компактного множества и удовлетворяющей условиям $f(xu) = f(x)$, $f(uxu^{-1}) = f(x)$ $(x \in G,\ u \in K)$. Кроме того, для любой непрерывной, равной нулю вне компактного множества функции f такой, что $f(xu) = f(x)$, имеет место формула Планшереля $\int |f(x)|^2 dx = \int_F N_{\omega(\lambda)}(f)\, d\lambda$, где $N_\omega(f)$ — квадрат нормы оператора $\int f(x)\pi(x)\, dx$. М. И. Граев

3940. О бесконечномерных представлениях полупростых алгебр Ли и о некоторых функционалах на универсальных обертывающих алгебрах. I. Сакаи (On infinite-dimensional representations of semi-simple Lie algebras and some functionals on the universal enveloping algebras. I. Sakai Shôichirô), Proc. Japan Acad., 1954, 30, № 4, 305—312 (англ.)

Пусть G — связная полупростая группа Ли, $\mathfrak{G}_0$ — ее алгебра Ли, G_0 — присоединенная группа алгебры $\mathfrak{G}_0$. Известно, что $G_0 = K_0 \cdot S_0$, где K_0 — максимальная компактная подгруппа, S_0 — разрешимая подгруппа группы G_0. Прообраз K группы K_0 в G есть в общем случае прямое произведение компактной группы на векторную. В исследованиях Годмана по теории представлений полупростых групп Ли (Godement R., Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 73, № 3, 496—556) существенно предполагается, что группа K компактна. Автор ставит задачей распространить результаты Годмана на общий случай.

Рассматривается вещественная полупростая алгебра Ли $\mathfrak{G}_0$. Пусть $\mathfrak{k}_0$ — подалгебра $\mathfrak{G}_0$ такая, что соответствующая ей подгруппа в G_0 компактна, $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{k}$ — окомплексивания $\mathfrak{G}_0$ и $\mathfrak{k}_0$, $U(\mathfrak{G})$ и $U(\mathfrak{k})$ — универсальные обертывающие алгебры $\mathfrak{G}$ и $\mathfrak{k}$; $\mathfrak{A} = U(\mathfrak{k})\, U^\circ(\mathfrak{G})$, где $U^\circ(\mathfrak{G})$ — совокупность элементов из $U(\mathfrak{G})$, коммутирующих со всеми элементами из $U(\mathfrak{k})$. Приводится несколько результатов о представлениях алгебры $U(\mathfrak{G})$. Устанавливается, в частности, что квазипростое в

смысле Хариш-Чандра представление $U(\mathfrak{G})$ задает определенным образом неприводимые представления $\mathfrak{A}$ в конечномерных пространствах неприводимых представлений $\mathfrak{k}_0$. Этот результат был получен Годманом при дополнительных предположениях. М. И. Граев

3941. О распределении почти периодов почти периодических функций на группах. Хартман (Über die Verteilung der Fastperioden von fastperiodischen Funktionen auf Gruppen. Hartman S.), Studia math., 1955, 15, № 1, 56—61 (нем.)

Элемент s называется ε-периодом комплексной функции f, определенной на группе G, если $|f(xsy) - f(xy)| < \varepsilon$ для произвольных $x, y \in G$. Автор доказывает, что если f почти периодическая, то для каждых $\varepsilon > 0$ и $t \in G$ множество ε-периодов f относительно плотно в последовательности $\{t^n\}$, т. е. существует целое l такое, что каждая последовательность $t^{k+1}, t^{k+2}, \ldots, t^{k+l}$ содержит ε-период.

Пусть G — абелева группа и $\sum_1^\infty a_\nu \chi_\nu(x)$ — ряд Фурье почти периодической функции f на G. Пусть элемент $s \in G$ таков, что из равенства $\chi_1^{r_1}(s) \cdot \ldots \cdot \chi_m^{r_m}(s) = 1$ ($r_1, \ldots, r_m$ — целые) всегда следует $\chi_1^{r_1}(x) \cdot \ldots \cdot \chi_m^{r_m}(x) = 1$ для каждого $x \in G$. Тогда для каждого $\varepsilon > 0$, за исключением не более чем счетного множества, и каждого t ε-периоды f встречаются в последовательности $\{t + ns\}$ с положительной плотностью, зависящей от ε, но не от s и t. R. Sikorski

3942. Об общих эргодических теоремах. Цурими (On general ergodic theorems. Tsurumi Shigeru), Tôhoku Math. J., 1954, 6, № 2—3, 264—273 (англ.)

Рассматривается пространство с мерой $(X, \mathfrak{B}, \mu)$, где X — абстрактное множество, $\mathfrak{B}$ — борелевское тело его подмножеств и μ есть σ-конечная мера на $\mathfrak{B}$. По определению, две последовательности измеримых функций $\{f_j(x)\}$ и $\{g_j(x)\}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ обладают свойством однородности, если для любого множества A в $(2m)$-мерном пространстве

$$\mu(\{x;\ (f_{n_1+h}(x), g_{n_1+h}(x), \ldots, f_{n_m+h}(x), g_{n_m+h}(x)) \in A\})$$

не зависит от h (n, m, h — целые числа, причем $h \geqslant 0$, $n > 0$, $m > 0$).

Теорема. Пусть $\{f_j(x)\}$ и $\{g_j(x)\}$ — последовательности измеримых функций, обладающие свойством однородности и такие, что $f_1(x)$ μ-интегрируема, $g_1(x) > 0$ и $\sum_{j=1}^\infty \min\{g_j(x),\ k\} = \infty$ для почти всех $x \in X$ при некотором положительном k. Пусть далее $p(j)$ и $q(j)$ — периодические функции, определенные для положит. целых чисел, причем $q(j) > 0$ для всех j. Тогда предел $\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n f_j(x)\, p(j) / \sum_{j=1}^n g_j(x)\, q(j)$ существует и конечен для почти всех $x \in X$. В частности, если $p(j) = q(j) = 1$ для всех j, то предположение, что $\sum_1^\infty \min\{g_j(x), k\} = \infty$ может быть заменено предположением, что $\sum_1^\infty g_j(x) = \infty$.

Как следствия теоремы получаются эргодические теоремы Дуба, Хопфа, А. Я. Хинчина (Dooh J. L., Duke Math. J., 1940, 6, 290—306; Хопф Э., Успехи матем. наук, 1949, 4, № 1, 113—182; Хинчин А. Я., Матем. сб., 1934, 41, 14—15). М. И. Грабарь

3943. Патологические свойства параллельных переносов винеровского пространства. Камерон (The translation pathology of Wiener space. Cameron R. H.), Duke Math. J., 1954, **21**, № 4, 623—627 (англ.)

При изучении закона преобразования меры Винера при «параллельном переносе» $x(t) \to x(t) + x_0(t)$ в пространстве C всех непрерывных и обращающихся в нуль при $t = 0$ функций на отрезке $[0, 1]$ обычно предполагается, что $x_0(t)$ — достаточно гладкая функция из C (абсолютно непрерывная с интегрируемым квадратом производной); при этом условии параллельный перенос переводит измеримое относительно меры Винера множество пространства C в измеримое же, и меры таких двух множеств просто связаны одна с другой (Cameron R. H., Martin W. T., Ann. Math., 1944, 45, № 2, 386—396). Но множество таких $x_0(t)$ имеет нулевую меру в C. В реферируемой статье доказывается, что, вообще говоря, почти все $x_0(t)$ из C приводят к параллельным переносам, не сохраняющим свойства измеримости (т. е. переводящим некоторые измеримые множества в неизмеримые). Затем показывается, что в пространстве C не существует инвариантной относительно всех параллельных переносов меры такой, что она или абсолютно непрерывна относительно меры Винера и отлична от тождественного нуля, или же, наоборот, относительно нее абсолютно непрерывна мера Винера. А. М. Яглом

3944. К аксиоматической теории инвариантного интегрирования в абстрактных пространствах. Хадвигер, Неф (Zur axiomatischen Theorie der invarianten Integration in abstrakten Räumen. Hadwiger H., Nef W.), Math. Z., 1954, **60**, № 3, 305—319 (нем.)

Пусть $\mathfrak{R}$ — некоторое абстрактное пространство, Γ — группа его преобразований, $E(x) \not\equiv 0$ — фиксированная неотрицательная ограниченная функция на $\mathfrak{R}$. Рассматриваются действительные функции $F(x)$ $(x \in \mathfrak{R})$, для которых $|F(x)|$ мажорируется некоторой конечной действительной линейной комбинацией функций вида $E(\alpha x)$ $(\alpha \in \Gamma)$.

Исследуется, при каких условиях существует линейное инвариантное семейство таких функций, содержащее $E(x)$, на котором может быть определен инвариантный неотрицательный аддитивный и однородный функционал $J \not\equiv 0$. Очевидно, для этого необходимо и достаточно, чтобы из неотрицательности функции вида $\sum p_\nu E(\alpha_\nu x)$ $(\alpha_\nu \in \Gamma$, сумма конечная) вытекала неотрицательность $\sum p_\nu$. Если это условие выполнено, то в качестве инвариантного семейства функций можно взять совокупность всех функций вида $\sum p_\nu E(\alpha_\nu x)$ и положить $J(\sum p_\nu E(\alpha_\nu x)) = \sum p_\nu$; в работе этот функционал распространяется на некоторое, вообще говоря, более широкое инвариантное семейство. Исследуется, при каких ограничениях на $\mathfrak{R}$, Γ и $E(x)$ указанное условие выполняется; в частности, оно всегда выполнено, если Γ абелева. Ю. М. Березанский

3945. Некоторое определение понятия дистрибуции. Сикорский Р., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 5, 207—210

Определение понятия распределения. Сикорский (A definition of the notion of distribution. Sikorski R.), Bull. Acad. polon sci., Cl. 3, 1954, 2, № 5, 209—211 (англ.)

Автор вводит распределение на замкнутом интервале P как производную конечного порядка n от непрерывной функции f. Он делает это интуитивное определение точным, определяя распределение на P как класс пар $\{n, f\}$; при этом пары $\{n, f\}$ и $\{m, g\}$ $(n \geqslant m)$ принадлежат одному классу (эквивалентны), если f имеет непрерывную производную $f^{(n-m)}$, отличающуюся от функции g на многочлен степени ниже m. Затем вводится распределение на открытом интервале Q как последовательность распределений $\{\Theta_n\}$ на замкнутых интервалах P_n ($P_n \subset P_{n+1}$, $Q = \bigcup P_n$), в которой распределение Θ_{n+1} есть продолжение в некотором

смысле распределения Θ_n с интервала P_n на P_{n+1}. Таким способом получается распределение бесконечного порядка, которое не может рассматриваться во всем интервале как производная определенного порядка от непрерывной функции.

Случай распределений в многомерном пространстве подробно не рассматривается. Конструкция автора подобна конструкции Кёнига (РЖМат, 1953, 649), отличаясь от нее тем, что в исходном пункте берутся непрерывные функции, а не суммируемые функции, что, однако, значительно упрощает теорию.

В заключение дается аксиоматическое определение понятия распределения на конечном интервале. Одна из аксиом утверждает, что линейное пространство непрерывных функций изоморфно части множества распределений. J. Mikusiński

3946. **Инвариантные дельта-функции в смысле распределений. Такахаси** (Invariant delta functions in the sense of distributions. Takahashi Takehiko). Progr. Theoret. Phys., 1954, **11**, 1—10 (англ.)

Автор производит некоторые известные (но необоснованные) вычисления квантовой механики, становясь на строгую точку зрения теории обобщенных функций (распределений). Приведены не все доказательства. Обозначения: пространство-время $(x,\ t)$; $x=(x_1, x_2, x_3)$; $x^2=\sum_{j=1}^{3} x_j^2$; $dx=dx_1dx_2dx_3$; $-\Box=\partial^2/\partial t^2-\sum_{j=1}^{3}\partial^2/\partial x_j^2$; $x^2=t^2-x^2$; $s=(t^2-x^2)^{1/2}$ при $t^2-x^2\geqslant 0$ и $s=0$ при $t^2-x^2\leqslant 0$; $s^+=s$ при $t\geqslant 0$, $s^+=0$ при $t<0$.

1. Автор находит распределение Грина ($t>0$) дифференциального оператора $-(\Box+\varkappa^2)$, исходя из классического решения (даваемого интегралом Пуассона при $\varkappa=0$) задачи Коши для однородного уравнения с начальными условиями: $u(x, 0)=0$, $\partial u(x, 0)/\partial t=f(x)$. Это распределение, обозначаемое в квантовой механике Δ^R, хорошо известно: это некоторое распределение по x, непрерывно зависящее от параметра t: $\Delta^R=D^R-(\varkappa/4\pi s^+)J_1(\varkappa s^+)$, где D^R (значение Δ^R при $\varkappa=0$) обращается в 0 при $t\leqslant 0$, а при $t\geqslant 0$ принимает значение $t\mu_t$ (μ_t означает единичную массу, однородно распределенную на сфере $x^2=t^2$ пространства R^3).

2. Автор вычисляет свертку $\Delta^{(1)}=(1/\pi)\,\Delta * P(t^{-1})$, $P(t^{-1})$ означает распределение $\delta_x \times vp\,(t^{-1})$. Находится $\Delta^{(1)}=D^+ +$ некоторая функция от σ, являющаяся комбинацией функций Неймана N_1 и Кельвина K_1 и имеющая логарифмическую особенность на поверхности светового конуса: $(\varkappa/4\pi\sigma)N_1(\varkappa\sigma)+(1/2\pi^2\sigma^2)$ для $\sigma^2\geqslant 0$, $(\varkappa/2\pi^2(-\sigma^2)^{1/2})K_1(\varkappa(-\sigma^2)^{1/2})-(1/2\pi^2\sigma^2)$ для $\sigma^2<0$.

3. Если $F(t)$ — функция, удовлетворяющая при $t\to 0+$ следующему условию: $F(t)=\sum_{m_0\geqslant m>0} t^{-m}(a_m+b_m\log t)+a+b\log t+o(1)$, то положим $\mathrm{Pf}_{t\to 0}F(t)=a$, $\mathrm{Pl}_{t\to 0}F(t)=b$. Обозначив тогда через V_ε^+ объем $(1-\varepsilon)^2t^2-x^2\geqslant 0$ и V_ε^- объем $t^2-(1-\varepsilon)^2x^2\leqslant 0$, автор определяет распределения Pf (соотв. Pl) $s^{-2}(\varphi)=$

$$=\underset{\varepsilon\to 0}{\mathrm{Pf}\ (\text{соотв. Pl})}\ \lim_{\eta\to 0}\left[\iint_{V_\varepsilon^+,\,|t|\geqslant\eta}\iint\varphi(x,t)\sigma^{-2}\,dxdt\right]$$

и, аналогично, распределения, соответствующие V_ε^-, и их комбинации. Например $\overline{D}=(1/4\pi)\,\mathrm{Pl}\ s^{-2}$ (это равенство доказывает инвариантный характер распределения Pl s^{-2} относительно группы Лоренца, что непосредственно из определения не видно). Далее

$$P\sigma^{-2}(\varphi)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\iint_{V_\varepsilon^+}\iint+\iint_{V_\varepsilon^-}\iint\right)\varphi\sigma^{-2}\,dxdt,$$

$$D^{(1)}=-(1/2\pi^2)\,P\sigma^{-2}.$$

Наконец — $\Box\log|\sigma|=P\sigma^{-2}$. L. Schwartz

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 876.

3947. **Группа симметрии изотропного осциллятора** (Письмо в редакцию). **Демков Ю. Н.**, Ж. эксперим. и теор. физики, 1954, **26**, № 6, 757
См. РЖФиз, 1955, 73.

3948 К. **Линейные операторы в гильбертовом пространстве. Шмейдлер** (Lineare Operatoren im Hilbertschen Raum. Schmeidler Werner. Stuttgart, Teubner, 1954, 89 S., 7. 80 DM), Dtsch. Nationalbibliogr., 1955, **A**, № 38, 2154 (нем.)

3949 К. **О линейных нормальных операторах в гильбертовом пространстве. Кильпи** (Über lineare normale Transformationen im Hilbertschen Raum. Diss., Kilpi Yrjö. Helsinki, Kirjapaino O. Y. Sana, 1953, 37 S.), Dtsch. Nationalbibliogr., 1954, B, № 19, 1595 (нем.)

3950 К. **Об алгебрах операторов в гильбертовых пространствах. Паллю-де-Ла-Барьер** (Sur le algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens. Thèse. Pallu de la Barrière Robert. Paris, Gauthier-Villars, 1954, 55 p.), Bibliogr. France, 1955, **144**, № 12, 275 (франц.)

См. также: 3689, 3715, 3802, 3803, 3804, 3970, 4095, 4096, 4097

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

3951. **О достоверности индуктивных суждений. Хузурбазар** (On the certainty of an inductive inference. Huzurbazar V. S.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 4, 761—762 (англ.)

3952. **Об одном замечании лорда Рассела. Бине** (Notes on a remark by lord Russell. Binet F. E.), Brit. J. Philos. Sci., 1954, **5**, № 17, 67—70 (англ.)

3953. **Асимптотические формулы для устойчивых законов распределения. Скороход А. В.**, Докл. АН СССР, 1954, **98**, № 5, 731—734

Краткая сводка асимптотических формул, определяющих поведение плотностей устойчивых распределений на концах интервалов, в которых эти плотности отличны от нуля. Новые результаты автора относятся к случаям, когда параметры α и β законов удовлетворяют условиям $\alpha=1$ и $|\beta|\leqslant 1$, иначе впервые исследован случай $\alpha>1$, $\beta=1$ (в обозначениях автора $\beta=-1$). Остальные случаи были рассмотрены ранее Винтнером (Wintner A., Duke Math. J., 1941, **8**, № 4, 678), Поллардом (Pollard H., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, **52**, 908), Бергстрёмом (Bergström H., Arkiv mat., 1952, **2**, № 18; РЖМат, 1954, 5669), Линником (РЖМат, 1954, 4853), Чжао Чжун-чжэ (РЖМат, 1955, 2313). Н. В. Смирнов

3954. **Неравенства между моментами эквивалентных случайных величин. Зубжицкий** (Les inégalités entre les moments des variables aléatoires équivalentes. Zubrzycki S.), Studia math., 1954, **14**, № 2, 232—242 (франц.)

Доказывается 12 теорем о неравенствах, указанных в заголовке.

3955. Распределение, возникающее при изучении инфекционных заболеваний. Эруин (A distribution arising in the study of infections diseases. Irwin J. O.), Biometrika, 1954, 41, № 12, 266—268 (англ.)

Пусть X есть сумма n случайных величин x_i, равных 1 (0) с вероятностью $p\,(q=1-p)$, причем коэффициент корреляции x_i и x_j равен r. Тогда X имеет распределение с гипергеометрической производящей функцией

$$\frac{(N_q)_{(n)}}{N_{(n)}}\,F(-n,\ -N_p,\ N_q-n+1,\ Z),$$

где $N=-\dfrac{1-r}{r}$ и $N_{(n)}=N\cdot(N-1)\ldots(N-n+1)$.

Н. Н. Ченцов, В. П. Швальб

3956. Исследование вероятного расположения корней вещественных алгебраических уравнений. Финцель (Untersuchungen über die wahrscheinliche Lage der Wurzeln reeller algebraischer Gleichungen. Finzel L.), Math. Nachr., 1954, **11**, № 1—2, 85—104 (нем.)

Существует много теорем о границах для корней алгебраических уравнений $x^n-a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}-\ldots+(-1)^n a_n=0$, коэффициенты которых подчинены некоторым ограничительным условиям (т. е. для так называемых «классов» алгебраических уравнений). Тем не менее вопрос о частоте этих корней, т. е. о вероятности, с которой какое-либо комплексное число будет корнем уравнения определенного класса, был впервые поставлен и решен для уравнений с комплексными коэффициентами Шпехтом (Specht W., Math. Nachr., 1950, 4, 126—149). Эти исследования проводятся здесь для уравнений с вещественными коэффициентами. Специально разбирается вопрос о вероятности $\varphi_l(R)$ того, что уравнение данного класса имеет в интервале R действительной прямой ровно l корней.

Из резюме автора

3957. О локальной предельной теореме для одинаково распределенных независимых слагаемых. Гнеденко Б. В., Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin. Math.-naturwiss. Reihe, 1953/54, **3**, № 4, 288—293

Дается обзор состояния вопроса о локальных предельных теоремах для независимых слагаемых. Воспроизводятся доказательства двух предельных локальных теорем, ранее опубликованных автором (Гнеденко Б. В., Колмогоров А. Н., Предельные распределения для сумм независимых случайных величин, гл. 9; Докл. АН СССР, 1954, 95, № 1). Формулируются новые проблемы в этой области. А. А. Бобров

3958. Об одном приложении схемы урн Пуассона. Ирон, Мерик (Sur une application du schéma d'urnes de Poisson. Huron R., Méric J.), Ann. Fac. Sci. Univ., Toulouse. Sci. math. et sci. phys., 1953 (1954), **17**, sér. 4, 265—272 (франц.)

Имеется k урн. В i-й урне доля белых шаров p_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k)$. Из каждой урны по схеме возвращенных шаров извлекается λ раз выборка объема n. Пусть X_r — число тех выборок, в которых оказалось ровно r белых шаров. Изучается предельное распределение случайной величины X_r при растущем k.

С. Х. Сираждинов

3959. Предельные распределения для нормированных сумм. Бергстрём (On limiting distributions for normed sums. Bergström Harald), Proc. Internat Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 276—278 (англ.)

Пусть $\{\xi_n^{(i)}\}$, $i=1,\ 2,$ — две последовательности независимых случайных величин, $v_n^{(i)}(x)$ — их функции распределения, $X_n^{(i)}=a_n^{-1}(\xi_1^{(i)}+\ldots+\xi_n^{(i)}-b_n)$. В предположении, что величины $a_n^{-1}\xi_k^{(i)}$ предельно пренебрегаемы, ставится задача: при каких условиях распределения величин $X_n^{(1)}$ и $X_n^{(2)}$ сходятся к одному и тому же закону $G(x)$. Определяя для каждого $\eta>0$ числа $c_{\lambda,n}^{(i)}(\eta)$ из равенств

$$\int_{|t|<\eta}\left(E(t)-v_\lambda^{(i)}(a_n^{-1}t+c_{\lambda,n}^{(i)})\right)dt=0,\ i=1,\ 2,$$

где $E(t)=0$ для $t\leqslant 0$, $=1$ для $t>0$, автор выводит в качестве ответа на поставленный вопрос необходимое и достаточное условие в форме:

$$\max_x\left|\sum_{\lambda=1}^{n}\left[v_\lambda^{(1)}(y_{\lambda,n}^{(1)})-v_\lambda^{(2)}(y_{\lambda,n}^{(2)})\right]*\varphi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right|\to 0$$

для любых $\eta>0$, $\sigma>0$; $\varphi(x)$-нормальная $(0,1)$ функция распределения.

Доказательство не приводится. Автор утверждает, что таким путем ему удается получить необходимые и достаточные условия сходимости к предельным распределениям в весьма общих случаях, в частности — известные условия Гнеденко — Дёблина принадлежности к области притяжения устойчивых законов.

А. А. Бобров

3960. Об асимптотических разложениях, связанных с суммами независимых случайных величин. Чжэн Цзэн-тун (關於獨立機變數之和的漸近展式. 鄭曾同), 數學學報 (Шусюэ сюэбао), Acta math. sinica, 1955, 5, № 1, 91—108 (кит.; рез. англ.)

Рассматривается последовательность $\{X_k\}$ независимых случайных величин с $MX_k=0$, $DX_k=\sigma_k^2$, функциями распределения (ф. р.) $V_k(x)$ и характеристическими функциями $v_k(t)$. Для ф. р. $F_n(x)$ и плотности нормированной суммы $(X_1+\ldots+X_n)/S_n$, где $S_n^2=\sigma_1^2+\ldots+\sigma_n^2$, даются асимптотические разложения. Так, например, при условиях 1) $S_n\to\infty$ при $n\to\infty$, 2) для некоторого $A>0$ и всех k $M|X_k|^3\exp A|X_k|<B\sigma_k^2$, 3) для каждого $\delta>0$ найдется постоянная $C>0$ такая, что $\sup_{|t|\geqslant\delta}\prod_{k=1}^{n}v_k(t)=O(\exp-CS_n^{-2/3})$, 4) величины X_k симметричны, при $X=o(S_n^{1/3})$ и любом целом m

$$F_n(x)=\sum_{u=0}^{3+m}(-1)^u h_u\Phi^{(u)}(x)+O\left(s_n^{-1-\frac{m}{6}}e^{-\frac{x^2}{2}}\right).$$

В. В. Петров

3961. Обобщение классической теории вероятностей. I. Цепи Маркова. Белман (On a generalization of classical probability theory, I. Markoff Chains. Bellman Richard), Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A., 1953, **39**, № 10, 1075—1077 (англ.)

В целях обобщения аналитического аппарата, связанного с цепями Маркова и марковскими процессами, для получения новых типов дифференциальных уравнений и установления новых связей анализа и алгебры автор предлагает аналитическое обобщение понятия цепей Маркова. Если $A=\|a_{ij}\|$ $(N\times N)$ — матрица переходных вероятностей однородной цепи Маркова, $X=\left\|\begin{matrix}x_1\\ \vdots\\ x_N\end{matrix}\right\|$ — одностолбцовая матрица веро-

ятностей состояний для n-го шага, то $A' = A^T X$ — матрица вероятностей состояний для $n+1$-шага. Предлагается вместо вероятностей x_i ввести реальные симметрические полуопределенные матрицы X_i, так что вместо X имеем набор матриц $X = \{X_i\}$ с условиями: $\Sigma_{i=1}^N \operatorname{tr} X_i = 1$ ($\operatorname{tr} X_i$ = след X_i).

Роль матриц переходных вероятностей играет набор N^2M матриц $A = \{A_{ijk}\}$ ($i, j = 1,2,\ldots, N$; $k = 1, 2, \ldots, M$). Переход от обобщенных распределений $X(n) = \{X_i(n)\}$ к $X(n+1)$ задается формулой:

$$X_i(n+1) = \sum_{k=1}^{M}\sum_{j=1}^{N} A_{ijk} X_j^{(n)} A_{ijk}^T \quad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

причем $\sum_{k=1}^{M}\sum_{i=1}^{N} A_{ijk} A_{ijk}^T = I$.

Доказываются аналоги свойства эргодичности.

Ю. В. Линник

3962. Члены вариационного ряда в центральной предельной модели. Лоэв (Termes variationnels dans le modèle limite central. Loève Michel), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 7, 722—724 (франц.)

Рассматривается последовательность серий независимых, бесконечно малых величин $\zeta_{n,1}, \ldots, \zeta_{n,k_n}$. Пусть $Y_{n,1}, \ldots, Y_{n,k_n}$ — величины n-й серии, расположенные в порядке возрастания. Приводится без доказательства ряд теорем о поведении величин $Y_{n,r}$ (Y_{n,k_n-s}) при фиксированном r (s). В частности, в предположении, что функция

$$L_n(x) = \sum\nolimits_k P\{\zeta_{n,k} < x\} \quad (x < 0),$$
$$= \sum\nolimits_k P\{\zeta_{n,k} > x\} \quad (x > 0)$$

сводится к некоторой функции $L(x)$ в каждой ее точке непрерывности, находится предельное распределение $Y_{n,r}$ и Y_{n,k_n-s}. В предположении, что распределения сумм величин n-й серии сходятся к предельному, дается явное выражение для характеристической функции величины $g(Y_{n,k_n})\cdot S_n$, где $g(x)$ — достаточно регулярна. Автор указывает, что его результаты обобщают ранее опубликованные результаты Дарлинга (Darling, Trans. Amer. Math. Soc., 1952, 75, 95—107) и Б. В. Гнеденко (РЖМат, 1954, 3387). Б. В. Гнеденко

3963. Условия регулярности марковских процессов с конечным числом возможных состояний. Добрушин Р. Л., Матем. сб., 1954, 34(76), № 3, 541—556

Пусть $R(s, t) = \{p_{ij}(s, t)\}$ ($0 \leqslant s < t \leqslant 1$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$) — матрица переходных вероятностей марковского процесса с конечным числом состояний. Выводятся необходимые и достаточные условия, при которых случайная функция $\omega(t)$, равная номеру состояния в момент t, с вероятностью единица, делает лишь конечное число скачков, в какой бы момент и из какого состояния ни начинался процесс («регулярность» процесса). Пусть $V_i[a, b]$ — верхняя грань сумм $\Sigma_j[1-p_{ii}(t_j, t_{j+1})]$, взятая по всевозможным конечным разбиениям $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ отрезка $[a, b]$. Назовем состояние E_i недоступным в момент $t-0$ (или $t+0$), если при всех j и $s < t$ (соответственно $s \leqslant t$) вероятность $p_{ji}(s, t-0) = 0$ (соответственно $p_{ji}(s, t+0) = 0$).

Теорема 1. Для регулярности процесса с матрицей $R(s, t)$ необходимо и достаточно, чтобы для всех пар E_i и t таких, что $\lim_{h+0} V_i(t, t-h) = \infty$ (или $\lim_{h+0} V_i(t, t+h) = \infty$), состояние E_i было недоступным в момент $t-0$ (соответственно $t+0$).

В частности, процесс регулярен, если величины $V_i(0, 1)$ ($i = 1, \ldots, N$) конечны. Если все состояния доступны во все моменты $t-0$ и $t+0$, то, наоборот, из регулярности процесса следует конечность всех $V_i(0, 1)$ (теорема 3). Математическое ожидание числа скачков ξ при любых начальных условиях $\omega(t_0) = k$ удовлетворяет неравенству $M\xi \leqslant \Sigma_{i=1}^N V_i(0, 1)$ (теорема 2). Приводятся также примеры различных патологических процессов.

А. А. Юшкевич

3964. Одномерное блуждание по схеме цепей Маркова. Эберль (Ein Zufallsweg in einer Markoffschen Kette von Alternativen. Eberl W.), Monatsh. Math., 1954, 58, № 3, 137—142 (нем.)

Вычисляются вероятности поглощения и средняя длительность дискретного блуждания по отрезку $0 \leqslant z \leqslant k$ с поглощающими концами. Предполагается, что частица из точки z ($0 < z < k$) переходит в $z+1$ или $z-1$ с вероятностями p_1, $q_1 = 1 - p_1$ или q_2, $p_2 = 1 - q_2$ в зависимости от направления предшествующего перехода.

С. Х. Сираждинов

3965. К теории цепей Маркова. Чжун (Contributions to the theory of Markov chains. Chung Kai Lai), J. Rec. Nat. Bur. Standards, 1953, 50, № 4, 203—208 (англ.)

Пусть последовательность случайных величин X_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$, принимающих целые положительные значения, образует однородную цепь Маркова. Пусть $p_{ij}^{(n)} = P\{X_{n+1} = j \mid X_1 = i\}$; ${}_kF_{ij}$ — вероятность того, что система, находившаяся вначале в состоянии i, попадет в состояние j прежде, чем она побывает в состоянии k, и F_{ij} — вероятность того, что она когда-нибудь попадет в состояние j. Пусть, наконец, ${}_kP_{ij}$ — математическое ожидание числа попаданий системы в состояние j до первого попадания в состояние k, если вначале система находилась в состоянии i. Дёблин (Doeblin W., Bull. soc. Math. France, 1938, 66, 210) показал, что если $F_{ij}F_{ji} > 0$, то существует

$$\lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n=0}^{N} p_{ii}^{(n)}\right) / \left(\sum_{n=0}^{N} p_{jj}^{(n)}\right) = E_{ij}. \qquad (1)$$

Автор находит (при $F_{ij}F_{ji} = 1$ и $i \neq j$) для этого предела следующие явные выражения: $\dfrac{1 + {}_jP_{ii}}{1 + {}_iP_{jj}}$, $\dfrac{1}{{}_iP_{ij}}$, $\dfrac{{}_jF_{ji}}{{}_iF_{ij}}$.

Кроме того, утверждается, что предел (1) существует всегда. Доказательство этого утверждения неверно, так как оно основано на, вообще говоря, неверном неравенстве ${}_iP_{ij} < \infty$ и приводит к неопределенности $0/0$. В связи с этим остается открытым вопрос, существует ли предел (1) при $F_{ij}F_{ji} = 0$.

Пусть далее m_{ij} — математическое ожидание времени до первого попадания в состояние j, если вначале система находилась в состоянии i. Предполагается, что все $m_{ij} < \infty$. Пусть задана некоторая функция $f(i)$ и $S_n = f(X_1) + \cdots + f(X_n)$. Дёблин показал, что при некоторых дополнительных ограничениях на цепь (реф. 3966) и при некоторых постоянных M и B отношение $\dfrac{S_n - M_n}{\sqrt{B_n}}$ асимптотически нормально. Автор показывает, что

$$M = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f(i)}{m_{ii}}, \quad B = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{f^2(i)}{m_{ii}} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_{ij} + m_{jk} - m_{ik}}{m_{kk}} f(k)$$

(если все эти ряды абсолютно сходятся). Показывается также, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} [p_{ik}^{(n)} - p_{jk}^{(n)}] = \frac{m_{jk} - m_{ik}}{m_{kk}}.$$

Выводятся также различные соотношения, связывающие величины F, P, m и некоторые другие аналогично вводимые величины. Р. Л. Добрушин

3966. К теории цепей Маркова. II. Чжун (Contributions to the theory of Markov chains. II. Chung K. L.), Trans. Amer. Math. Soc., 1954, **76**, № 3, 397—419 (англ.)

Выводятся различные предельные теоремы для однородной цепи Маркова, объединяемые общим методом доказательства, известным под названием метода Дёблина (Doeblin W., Bull. Soc. Math. France, 1938, **66**, 210); Колмогоров А. Н., Изв. АН СССР, сер. матем., 1949, **13**, 281). Мы будем использовать обозначения, введенные в предыдущем реферате. Предположим для всего дальнейшего, что при любых i и j $F_{ij} = 1$. Пусть $m_{ij}^{(p)}$ — момент порядка p $(0 < p < \infty)$ времени, прошедшего до первого попадания системы в состояние j, если вначале система находилась в состоянии i. Доказывается, что если $m_{ij}^{(p)} < \infty$ и $m_{ji}^{(p)} < \infty$ (быть может $i = j$), то то же самое верно для любой другой пары состояний. Для целого p это было доказано недавно Ходжесом и Розенблатом (РЖМат, 1953, 1727). Пусть заданы действительные функции $f(i)$ и $g(i)$, $i = 1, \ldots$, и пусть $\Sigma |f(i)| E_{1i} < \infty$, $\Sigma |g(i)| E_{1i} < \infty$ и $\Sigma g(i) E_{1i} \neq 0$. Показывается, что с вероятностью 1 существует

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\sum_{m=0}^{n} f(X_m)}{\sum_{m=0}^{n} g(X_m)} = \frac{\sum_{i=1}^{\infty} f(i) E_{1i}}{\sum_{i=1}^{\infty} g(i) E_{1i}}.$$

Независимо от автора этот результат был получен недавно на основе общей эргодической теории Харрисом и Роббинсом (РЖМат, 1955, 1395). Пусть вначале система находилась в состоянии 1 и пусть ν — момент ее первого возвращения в это состояние. Положим $Y_f = \Sigma_{n=1}^{\nu} f(X_n)$. Пусть $S_n = f(X_1) + \cdots + f(X_n)$. Для того чтобы последовательность S_n удовлетворяла закону больших чисел, достаточно, как доказывается, чтобы $m_{11} < \infty$ и $MY_f < \infty$. Однако приводится пример, показывающий, что эти условия не достаточны для усиленного закона больших чисел. Усиленный закон выводится в предположении, что $m_{11} < \infty$ и $MY_{|f|} < \infty$. Закон повторного логарифма доказывается в предположении, что $m_{11}^{(2)} < \infty$ и $M[Y_{|f|}]^2 < \infty$. При этом же условии находятся предельные распределения для $\max_{k \leqslant n}(S_n - MS_n)$ и $\max_{k \leqslant n} |S_n - MS_n|$, аналогичные соответствующим распределениям в случае независимых слагаемых (Erdös P., Kac M., Bull. Amer. Math. Soc., 1946, **52**, 292). Дёблин доказал центральную предельную теорему для последовательности S_n в предположении, что $m_{11}^{(2)} < \infty$ и $M[Y_f]^2 < \infty$. В той же работе Дёблина приведена приписываемая А. Н. Колмогорову гипотеза о том, что для выполнимости центральной предельной теоремы достаточно, чтобы $m_{11}^{(2)} < \infty$ и $\Sigma_{j=0}^{\infty} \frac{f^2(j)}{m_{jj}} < \infty$.

Автор приводит пример, опровергающий эту гипотезу. Литературные ссылки неполны. Так не указывается, что закон повторного логарифма для числа попаданий в одно состояние счетной цепи Маркова был получен Феллером (Feller W., Trans. Amer. Math. Soc. 1949, **67**, 98). Отсутствуют также ссылки на работы Т. А. Сарымсакова (Основы теории цепей Маркова, Гостехиздат, М., 1954; там же имеются ссылки на предыдущие работы). Отметим, впрочем, что один из примеров автора противоречит теореме Сарымсакова о законе повторного логарифма (цит. книга, § 27, теорема 1).

Р. Л. Добрушин

3967. Матричный метод исследования цепей Маркова со счетным множеством возможных состояний. Сарымсаков Т. А., Тр. Среднеаз. ун-та, 1953, вып. 56, кн. 9, Изд-во САГУ, Ташкент, 1—46

Результаты работы вошли в третью главу книги автора (РЖМат, 1956, 1523). Содержание: § 1. Основные определения; § 2. Критерии положительной регулярности и различные формы регулярности; § 3. Последовательности неотрицательных матриц; § 4. Вычисление финальных вероятностей. Регулярность; § 5. Примеры; § 6. Асимптотическое поведение вероятностей перехода $p_{ij}^{(t)}$ в других случаях. Средние вероятности; § 7. Закон повторного логарифма и основная предельная теорема. Библ. 8 назв. И. С. Аржаных

3968. Граничные свойства однородных процессов Маркова со счетным числом состояний. Урбаник (Limit properties of homogeneous Markoff processes with a denumerable set of states. Urbanik K.), Bull. Acad. polon. sci., Cl. III, 1954, 2, № 8, 371—373 (англ.)

Граничные свойства однородных процессов Маркова со счетным множеством состояний. Урбаник К., Бюл. Польской АН, Отд. 3, 1954, 2, № 8, 377—379

Рассматриваются указанные в заглавии процессы регулярного типа (т. е. процессы, в которых число переходов за конечный промежуток времени конечно с вероятностью единицы). Предельное множество для траектории $\omega(t)$ такого процесса определяется формулой

$$L(\omega) = \prod_{u \geqslant 0} \sum_{t \geqslant u} \overline{\{k : \omega(t) = k\}},$$

где черта означает операцию замыкания в пространстве неотрицательных целых чисел, пополненных точкой ∞. Утверждается, что $\Pr\{\omega : k \in L(\omega)\} > 0$ тогда и только тогда, когда интеграл от $\Pr\{\omega : \omega(t) = k\}$ по полупрямой $(0, \infty)$ расходится. Утверждается также, что предельные множества M процесса, определяемые условием

$$\Pr\{\omega : L(\omega) = \overline{M}\} > 0,$$

попарно не пересекаются. Из этих результатов выводится, что для процесса «рождения и смерти» $\lim_{t \to \infty} \omega(t) = 0$ или ∞ с вероятностью 1. Затем приведены алгебраические уравнения, которым удовлетворяют распределения F_n величин $S(\omega) = \sup_{t \geqslant 0} \omega(t)$, взятых при условии $\omega(0) = n$, и выписано решение в одном частном случае. C. Ryll-Nardzewski

3969. Предельные теоремы для сумм функций от последовательно пробегаемых состояний в цепях Маркова с произвольным множеством состояний. Добрушин Р. Л., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 3 (65), 180

Сформулирован без доказательства следующий результат о применимости центральной предельной теоремы к неоднородным цепям Маркова с абстрактным множеством состояний.

Теорема. Пусть $\rho(x, y) = \sup_E |P(x, E) - P(y, E)|$, $\rho_P = 1 - \sup_{x, y} \rho(x, y)$, где $P(x, E)$ — переходная вероятностная функция цепи. Пусть $P_{i, n}(x, E)$ — переходные вероятности, описывающие n-ю из цепей Маркова ($i = 1, 2, \ldots, n$; $n = 1, 2, \ldots$), удовлетворяют

условию $(\max_{1\leqslant i\leqslant n} p_{in})\, n^{1/3} \to \infty$, $n \to \infty$. Если случайные величины ζ_{in} связаны в такого рода цепь, причем $0 < c < D\xi_{in} < C < \infty$, то величины

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \xi_{in} - M \sum_{i=1}^{n} \xi_{in}\right) \Big/ \sqrt{D \sum_{i=1}^{n} \xi_{in}}$$

асимптотически нормальны при $n \to \infty$. Эта теорема обобщает результаты, полученные ранее А. А. Марковым, С. Н. Бернштейном, Ю. В. Линником и Н. А. Саповым (РЖМат, 1956, 3186). Н. А. Сапогов

3970. Свойства регулярности случайных преобразований. Шпачек (Regularity properties of random transforms. Špaček Antonín), Чехосл. мат. ж., 1955, 5, № 1, 143—151 (англ., рез. русск.)

Пусть F означает множество всех преобразований $f(x)$ некоторого пространства $X \neq 0$ в пространство $Y \neq 0$. В пространстве Y выделена σ-алгебра $\mathfrak{B}$ подмножеств с базой $\mathfrak{W}$. Обозначим через $\mathfrak{F}$ наименьшую σ-алгебру, содержащую множества $\{f : f(x) \in G\}$ при всяком $x \in X$ и $G \in \mathfrak{W}$. Говорят, что задано случайное преобразование $\{F, \mathfrak{F}, \mu\}$, если на $\mathfrak{F}$ задана мера μ. Обозначим через $\mathfrak{D}$ класс счетных множеств D такой, что объединение всех этих множеств совпадает с X, и сумма любого счетного числа множеств из $\mathfrak{D}$ содержится в некотором множестве из $\mathfrak{D}$.

Пусть преобразование T класса всех подмножеств X в подмножества F удовлетворяет следующим условиям:

1) если $D \in \mathfrak{D}$ и $g \in T(D)$, то $T(X) \cap \left(\bigcap_{x \in D} \{f : f(x) = g(x)\}\right) \neq 0$;

2) если $D \in \mathfrak{D}$, то $T(D) \in \mathfrak{F}$;

3) если $A \subset B$, то $T(B) \subset T(A)$. Случайное преобразование $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ называется T-регулярным с вероятностью 1, если $\bar{\mu}(T(X)) = 1$, где $\bar{\mu}$ — внешняя мера, построенная по мере μ. Основная теорема: Чтобы случайное преобразование $(F, \mathfrak{F}, \mu)$ было с вероятностью 1 T-регулярным, необходимо и достаточно, чтобы $\mu(T(D)) = 1$ для каждого D из $\mathfrak{D}$. В качестве примеров применения этой теоремы приводятся условия равномерной непрерывности случайных преобразований с вероятностью 1, когда X — метрическое сепарабельное, а Y — метрическое полное пространства; для случая, когда X булевская σ-алгебра, а Y — вещественная прямая, приводится условие аддитивности случайного преобразования с вероятностью 1.

Примечание референта. В резюме имеются опечатки. Условие (8) работы излишне, так как оно следует из условия (5). А. В. Скороход

3971. О равномерной непрерывности винеровского процесса. Сирао (On the uniform continuity of Wiener process. Sirao Tunekiti), J. Math. Soc. Japan, 1954, **6**, № 3—4, 332—335 (англ.)

Скажем, что $f(t) \in K_{\varphi}(t)$, если существует такое $\varepsilon > 0$, что из $|t' - t| = h \leqslant \varepsilon$ следует неравенство $|f(t') - f(t)| \leqslant \varphi(h)$. Пусть

$$\varphi(h, c) = \{h\,[2\log(1/h) + c\log\log(1/h)]\}^{1/2}.$$

Доказывается теорема: С вероятностью единица траектория $\zeta(t)$ винеровского процесса $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ принадлежит (не принадлежит) $K_{\varphi(h,c)}$ при $c > 5$ (< -1).

Примечание референта. Несущественное изменение метода позволяет доказать более общую теорему. Именно, положим

$$\psi(h, v) = \{h\,[2\log 1/h - \log\log 1/h + v(h)]\}^{1/2},$$

где $v(h) = o(\log\log 1/h)$ — монотонная функция, неограниченно возрастающая по абсолютной величине при $h \to 0$, тогда с вероятностью 1 $\zeta^{\nu}(t)$ принадлежит (не принадлежит) $K_{\psi(h,v)}$, смотря по тому, будет ли $v(h)$ [illegible] $v(h) < 0$. В. М. Золотарев

3972. Количество информации о гауссовском случайном процессе, содержащейся во втором процессе, стационарно с ним связанном. Пинскер М. С., Докл. АН СССР, 1954, 99, № 2, 213—216

Пусть $p_{\xi\eta}(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n)$ — совместная плотность вероятности двух случайных векторов $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$, а $p_{\xi}(x_1, \ldots, x_n)$ и $p_{\eta}(y_1, \ldots, y_n)$ — их частные плотности вероятности. Количество информации об одном из этих случайных векторов, содержащееся в другом векторе, определяется, по Шэннону, как число

$$I_n(\xi_1, \ldots, \xi_n; \eta_1, \ldots, \eta_n) = \int \ldots \int p_{\xi\eta} \log \frac{p_{\xi\eta}}{p_{\xi} p_{\eta}}\, dx_1 \ldots dx_n dy_1 \ldots dy_n.$$

Для двух случайных стационарных и стационарно-связанных последовательностей $\{\xi_n\}$ и $\{\eta_n\}$ полагается

$$I(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) = \lim_{k \to \infty} \frac{1}{k} \qquad 1, \ldots, \xi_k; \eta_1, \ldots, \eta_k)$$

(«количество информации на один шаг»). Для случайных процесов $\xi(t)$, $\eta(t)$ полагается

$$I(\xi(t), \eta(t)) = \lim_{h \to +0} \frac{1}{h} I(\{\xi(nh)\}, \{\eta(nh)\})$$

(«количество информации на единицу времени»). Доказывается, что для двух гауссовских стационарных и стационарно-связанных последовательностей, из которых хотя бы одна несингулярна,

$$I(\{\xi_n\}, \{\eta_n\}) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log \frac{f_{\xi\xi}(\lambda)\, f_{\eta\eta}(\lambda)}{f_{\xi\xi}(\lambda)\, f_{\eta\eta}(\lambda) - |f_{\xi\eta}(\lambda)|^2}\, d\lambda,$$

причем при $f_{\xi\xi}(\lambda) f_{\eta\eta}(\lambda) = 0$ подинтегральное выражение считается равным нулю. Здесь $f_{\xi\xi}$, $f_{\eta\eta}$, $f_{\xi\eta}$ — спектральные плотности. Для гауссовских процессов справедлива аналогичная формула (с интегралом в бесконечных пределах).

Высказывается предположение, что условие несингулярности одной из компонент не является необходимым для справедливости полученных результатов. А. С. Монин

3973. Замечания к проблеме экстраполяции в теории стационарных случайных процессов. Кавата (Remarks on prediction problem in the theory of stationary stochastic processes. Kawata Tatsuo), Tôhoku Math. J., 1954, ser. 2, **6**, № 1, 13—20 (англ.)

Рассматривается проблема экстраполяции стационарного случайного процесса $X(t)$, дифференцируемого p раз. На спектральную плотность $\Phi(x) = |\Psi(x)|^2$ налагаются условия:

$$\int_0^{\infty} |x|^{2p} \Phi(x)\, dx < \infty; \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log \Phi(x)}{1 + x^2}\, dx < \infty.$$

Пусть $A_p(z)$ — сумма p первых членов разложения e^z, а $B_p(z)$ — соответствующий остаток. Дается несколько эквивалентных формулировок и доказательство следующей теоремы: если функция

$$r(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\Psi(x)} \int_0^{\infty} e^{-itx}\, dt \int_{-\infty}^{\infty} \Psi(u)\, e^{iut}\, B_p(iu\alpha)\, du$$

есть предел в среднем квадратичном относительно $\Phi(x)$ последовательности функций $r_n(x)$, являющихся транс-

формациями Фурье—Стилтьеса функций $K_n(\theta)$, вариации которых на любом конечном интервале ограничены (несобственный интеграл Фурье — Стилтьеса также понимается в смысле сходимости в среднем квадратичном относительно $\Phi(x)$), то наилучшей линейной оценкой для $X(t+\alpha)$ будет

$$A_p\left(\alpha\frac{d}{dt}\right)X(t)+\lim_{n\to\infty}\int_0^\infty X(t-\theta)\,dK_n\theta,$$

где производные, предел и несобственный интеграл понимаются в смысле сходимости в среднем квадратичном. А. С. Монин

3974. О стационарных процессах на плоскости. **Уитл** (On stationary processes in the plane. Whittle P.), Biometrika, 1954, 41, № 3—4, 434—449 (англ.)

Изучаются двумерные стационарные вполне не детерминированные процессы, главным образом, дискретные, типа «линейной авторегрессии», которые могут быть записаны так:

$$L(T_s, T_t)\,\xi_{st}=\varepsilon_{st},$$

где ξ_{st} — наблюдаемая величина, ε_{st} — ошибка наблюдения, T_s и T_t — трансляционные операторы.

$$T_s\xi_{st}=\xi_{s+1,t};\quad T_t\xi_{st}=\xi_{s,t+1}$$

и

$$L(T_s, T_t)=\Sigma_j\Sigma_k\,a_{jk}T_s^jT_t^k.$$

Спектральная функция такого процесса может быть записана так:

$$F(\omega_1,\omega_2)=\frac{V}{L(z_1,z_2)\,L(z_1^{-1}z_2^{-1})},$$

где V — дисперсия ε, $z_1=e^{i\omega_1}$, $z_2=e^{i\omega_2}$.

Приведены условия, необходимые и достаточные для возможности рассматриваемого представления. Основная часть работы посвящена выборочной теории. Метод изучения аналогичен методу, развитому в предшествующих статьях Уитла 1951—1953 гг. (РЖМат, 1954, 5186; 1955, 1400, 1861). Доказан следующий основной результат. Если величины ξ_{st} нормальны со средним 0 и образуют стационарный процесс рассматриваемого типа со спектральной функцией $F(\omega_1,\omega_2)$, то оценки максимального правдоподобия параметров F получаются минимизацией

$$\mathfrak{C}=\frac{1}{4\pi^2}\int\int\left[\log F+\frac{f}{F}\right]d\omega_1\,d\omega_2,$$

где f — эмпирическая спектральная функция. В заключение рассмотрим некоторые частные случаи, а также стохастические дифференциальные уравнения 1-го и 2-го порядков, представляющие непрерывный аналог рассматриваемой схемы.

В формуле (23) вместо z_1^k должно быть z_2^k. А. А. Зингер

3975. О гиперсферически симметричных случайных функциях со стационарными гауссовскими компонентами, имеющими конечную дисперсию. **Хорнби** (Sur les fonctions aléatoires à symétrie hypersphérique avec composantes gaussiennes et stationnaires du second ordre. Hornby Harold), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 26, 2480—2482 (франц.)

Под упоминаемыми в заглавии случайными функциями автор понимает M-мерные случайные функции

$$X(t)=\{X_1(t), X_2(t),\ldots,X_M(t)\},$$

где $X_1(t), X_2(t),\ldots,X_M(t)$ — независимые между собой одинаково распределенные гауссовские стационарные случайные процессы с нулевыми математическими ожиданиями и корреляционными функциями $E\{X_j(t+\tau)X_j(t)\}=\Psi(\tau)$, $j=1,2,\ldots,M$. В дальнейшем предполагается, что $\Psi(\tau)$ по крайней мере дважды дифференцируема. Указывается, что в таком случае математическое ожидание промежутка времени между двумя последовательными пересечениями функцией $Z(t)=\Sigma_{j=1}^M X_j^2(t)$ уровня $Z(t)=r^2$ (т. е. между двумя последовательными пересечениями векторной случайной функцией $X(t)$ гиперсферы радиуса r с центром в начале координат) равно

$$\frac{\Gamma\left(\frac{M}{2}\right)}{r}\left(\frac{2\Psi(0)}{r^2}\right)^{\frac{M}{2}-1}\left\{\frac{\pi\Psi^2(0)}{-2\Psi''(0)}\right\}^{\frac{1}{2}}e^{r^2/2\Psi(0)};$$

оно достигает своего минимального значения при $r^2=(M-1)\Psi(0)$, а при $r\to0$ и $r\to\infty$ неограниченно возрастает.

Доказательство приведенной формулы опирается на формулу Райса (см. статью в сб. «Теория передачи электрических сигналов при наличии помех», 1953, М., Изд-во ин. лит.) для математического ожидания промежутка между двумя последовательными нулями стационарного случайного процесса; в данной заметке оно лишь намечено. А. М. Яглом

3976. Разложение случайных функций в ряд Фурье. **Рут, Питчер** (On the Fourier series expansion of random functions. Root W. L., Pitcher T. S.), Ann. Math. Statistics, 1955, 26, № 2, 313—318 (англ.)

Рассматривается случайный процесс $x(t)$ с конечными вторыми моментами $R(s,t)=E\{x(s),\overline{x(t)}\}$ и $E\{x(t)\}=0$. Карунен и Лоэв доказали, что, если $x(t)$ непрерывен (в среднем квадратичном) на конечном интервале (a,b), то

$$x(t)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_1^n x_i\Psi_i(t),$$

где $\Psi_i(t)$ ортогональны на (a,b) и x_i попарно некоррелированы, в том и только том случае, если $\Psi_i(t)$ и λ_i являются собственными функциями и собственными значениями интегрального уравнения

$$\int_a^b R(s,t)\overline{\Psi(t)}\,dt=\lambda\overline{\Psi(s)}.$$

Отсюда авторами выводится

Теорема 1. Пусть $x(t)$ — стационарный в широком смысле случайный процесс, непрерывный в среднем квадратичном, тогда

$$x(t)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{-n}^{n}\frac{x_ie^{ik\omega\tau}}{\sqrt{T}},\quad\omega=\frac{2\pi}{T};\ 0<t<T,$$

где x_i попарно ортогональны, в том и только в том случае, если $x(t)$ периодичен с периодом T.

Далее доказывается, что для каждого стационарного нормального процесса существует процесс вида

$$y(t)=\underset{n\to\infty}{\text{l.i.m.}}\sum_{-n}^{+n}x_ke^{i\omega kt},\quad\omega=2\pi/T$$

с попарно некоррелированными x_k и имеющий на отрезке $0\leqslant t\leqslant T/2$ те же многомерные распределения, что и $x(t)$.

В остальной части статьи исследуется поведение при $T \to \infty$ величины $E(c_n \bar{c}_m)$, где c_n — n-ый коэффициент разложения отдельной реализации процесса $x(t)$ в ряд Фурье на интервале $(-T, +T)$. М. Ш. Пинскер

3977. Корреляционная функция и спектральная плотность. Уайз (The autocorrelation function and the spectral density function. Wise J.), Biometrika, 1955, 42, № 1—2, 151—159 (англ.)

Рассматривается циклическая стационарная случайная последовательность X_i с нулевым математическим ожиданием и корреляционной функцией $\sigma^2 \rho_L$, имеющей по L период N. Устанавливается, что корреляционная матрица $V = EX_iX_j$, $i, j = \overline{1, N}$ может быть записана в виде

$$V = \sigma^2 \sum_{k=0}^{[N/2]} \rho_k (W^k + W^{-k}) = g(W),$$

где W — квадратная матрица порядка N, отличающаяся от единичной матрицы перестановкой последнего столбца на первое место. Спектральная плотность последовательности получается при этом по формуле $\nu(\theta) = g(e^{i\theta})$, а корни матрицы V — по формуле $\nu_s = g(e^{2\pi is/N})$. В качестве примера рассматривается циклическая авторегрессивная модель.

Аналогичный метод предлагается для описания нециклических последовательностей, причем вместо W вводится бесконечная матрица U, отличающаяся от бесконечной единичной матрицы добавлением на первое место столбца из нулей. При этом остается в силе формальное соотношение между корреляционной матрицей $V = f(U)$ и спектральной плотностью $\nu(\theta) = f(e^{i\theta})$. Обнаруживается весьма простой способ обращения матрицы V. В качестве примера берется нециклическая авторегрессивная модель. А. С. Монин

3978. Замечания о нормальном распределении. Какида (正型超函數に關する一注意. 垣田高夫), 數 (Сугаку), 1954, 6, № 4, 218—219 (япон.)

3979. Применение понятия характеристической функции к изучению некоторых проблем статистической механики. Блан-Лапьер (Application de la notion de fonction caractéristique à l'étude de quelques problèmes de mécanique statistique. Blanc-Lapierre André Joseph Lucien), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 280—281 (франц.)

См. РЖМат, 1954, 4859.

3980. Статистическое описание непрерывных полей. Обухов А. М., Тр. Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24, 3—42

См. РЖМех, 1955, 5052.

3981 К. Теория вероятностей; основания, случайные последовательности. Лоэв (Probability theory: foundations, random sequences. Loeve Michel. London, Macmillan, 1955, xviii, 515 pp., 90 sh.), Brit. Nat. Bibliogr., 1955, № 288, 10 (англ.)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

3982. Некоторые порядковые распределения и их приложения. Гаек (Některá pořadová rozdělení a jejich použití. Hájek Jaroslav), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 1, 17—31 (чеш., рез. русск., англ.)

Пусть α означает сумму всех чисел, содержащихся в подмножестве множества $A = \{1, 2, \ldots, N\}$. Если 2^{-N} подмножеств равновероятны, то производящим полиномом случайной величины α является

$$2^{-N} \prod_{n=1}^{N} (1 + t^n).$$

Рассмотрим множество всех перестановок множества A. Если все $N!$ перестановок равновероятны, то число j всех инверсий в каждой перестановке имеет производящий полином

$$(N!)^{-1} (1 - t)^{-N} \prod_{n=1}^{N} (1 - t^n).$$

Рассмотрим все подмножества $B \subset A$, в которых число элементов k постоянно. Под инверсиями между множествами B и $A - B$ мы понимаем пары чисел (p, q), где $p > q$, $p \in B$, $q \in A - B$. Число β всех инверсий между множествами B и $A - B$ является случайной величиной, производящим полиномом которой будет

$$\prod_{n=1}^{k} \frac{1 - t^{N-n+1}}{1 - t^n} \binom{N}{k}^{-1}$$

Доказана сходимость распределений α и β к нормальному при $N \to \infty$ и $k \to \infty$ и определено предельное распределение β при $N \to \infty$ и постоянном k.

Приведены примеры применения полученных результатов в статистике. Josef Novák

3983. О разложении симметрических функций и статистик. Зия-эд-Дин (On development of symmetric functions and symmetric functional statistics. Zia-ud-Din M.), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 308—309 (англ.)

3984. Выражение k-статистик k_9 и k_{10} в терминах сумм степеней и выборочных моментов. Зия-эд-Дин (Expression of the k-statistics k_9 and k_{10} in terms of power sums and sample moments. Zia-ud-Din M.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 4, 800—803 (англ.)

3985. Об условиях регулярности для оценок максимального правдоподобия. Герленд (On regularity conditions for maximum likelihood estimators. Gurland John), Skand. aktuarietidskr., 1954, № 1—2, 71—76 (англ.)

Как известно, построенная по выборке объема n из совокупности с плотностью $p(x/\theta)$ оценка наибольшего правдоподобия θ_n является состоятельной, асимптотически нормальной и эффективной оценкой параметра θ, если только $p(x/\theta)$ удовлетворяет некоторым условиям регулярности. Условия, приведенные в книге Г. Крамера (Математические методы статистики, 1948, И.—Л., Москва), предполагают существование трех производных у плотности $p(x/\theta)$. Несколько усовершенствуя доказательства Крамера, автор получает условия, которые содержат ограничения на поведение только первых двух производных. По мнению референта, наиболее простая и эффективная проверка выполнения условий автора сводится к проверке выполнения условий Крамера. Н. Н.Ченцов

3986. Критерии асимметрии и эксцесса, построенные по упорядоченной выборке. Дейвид, Джонсон (Tests for skewness and kurtosis with ordered variates. David F. N., Johnson Norman Lloyd), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, 2, Amsterdam, 1954, 286 (англ.)

3987. О некоторых проблемах линейной оценки. Атикулла (On some problems of linear estimation. Atiqullah M.), Pakistan J. Scient. Res., 1955, 7, № 2, 76—78 (англ.)

3988. О верхней границе отклонения функции распределения критерия Вилькоксона для проблемы двух выборок от предельного нормального распределения

при конечных объемах выборок. [illegible] Стокер (An upper bound for the deviation between the distribution of Wilcoxon's test statistic for the two-sample problem and its limiting normal distribution for finite samples. I. Stoker D. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 599—606; Indagationes math., 1954, **16**, № 5, 599—606 (англ.)

Пусть две независимые выборки $\{x_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, и $\{y_j\}$, $j = 1, 2, \ldots, n$, взяты из совокупностей с функциями распределения $F(t)$ и $G(t)$ соответственно. Критерий Вилькоксона для проверки гипотезы H_0: $F(t) \equiv G(t)$, основывается на статистике U, представляющей число пар i, j, для которых $y_j < x_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Асимптотическая нормальность U при больших m и n при гипотезе H_0 была обнаружена в 1947 г. в работе Манна и Уитнея (Mann H. B., Whitney D. R., Ann. Math. Statistics, 1947, 18, 50—60). Этот результат был обобщен Леманом (Lehmann E. L., Ann. Math. Statistics, 1951, 22, 165—179), показавшим, что нормальность будет иметь место при $n \to \infty$, $\frac{m}{n} = \text{const}$ и условии $0 < \theta = p(y < x \mid F, G) < 1$. Основываясь на оценках Берри и Эссена для остаточного члена в теореме Ляпунова, автор оценивает верхнюю границу отклонений функции распределения U от предельного нормального закона, предполагая, что F и G не имеют общих точек разрыва. Н. В. Смирнов

3989. О верхней границе отклонения функции распределения критерия Вилькоксона для проблемы двух выборок от предельного нормального распределения при конечных объемах выборок. II. Стокер (An upper bound for the deviation between the distribution of Wilcoxon's test statistic for two-sample problem and its limiting normal distribution for finite samples. II. Stoker D. J.), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **A57**, № 5, 607—614; Indagationes math., 1954, **16**, № 3, 607—614 (англ.)

Приводятся некоторые упрощения в выражении границ отклонения распределения U от нормального закона, найденных в предшествующей работе (реф. 3988). Высказывается ряд замечаний относительно предельного распределения класса статистик, введенных Хёфдингом (Hoeffding W., Ann. Math. Statistics, 1948, 19, 293—325), а также относительно распределения U в случае, когда F и G имеют общие точки разрыва. Приводится конкретный расчет верхней границы отклонения для альтернативы: $G = F^2$. Н. В. Смирнов

3990. Проверка неизменности распределения вероятностей в двух независимых выборках. Гнеденко Б. В. Math. Nachr., 1954, 12, № 1—2, 29—66 (русск.; рез. [illegible])

Обзорная статья по непараметрическим методам проверки однородности двух независимых выборок, излагающая результаты автора, В. С. Королюка, Е. Л. Рывчевой, референта (Докл. АН СССР, 1951, **80**, № 4; 1952, **82**, № 4—6; **85**, № 1, 3; Докл. АН УССР, 1952, № 4, 5; Укр. матем. ж., 1952, **4**, № 4) о предельных распределениях величин, характеризующих расхождение между эмпирическими функциями распределения сравниваемых выборок, а также некоторые неопубликованные ранее результаты автора (о числе максимальных уклонений, сравнение квадратической погрешности различных критериев и т. д.). Обсуждаются возможности применения полученных критериев в практических приложениях. В. С. Михалевич

3991. Мощность нескольких непараметрических критериев при предположении нормальности распределения. Диксон (Power under normality of several nonparametric tests. Dixon W. J.), Ann. Math. Statistics, 1954, 25, № 3, 610—614 (англ.)

Табулируется мощность и эффективность по мощности четырех непараметрических критериев (ранговая сумма, максимум уклонения, положения медиан и общее число серий) для проверки тождественности законов распределения в двух выборках одинакового малого объема ($N = 3, 4, 5$) из нормальных совокупностей относительно альтернатив $\delta = \frac{|\mu_1 - \mu_2|}{\sigma}$, где μ_1 и μ_2 — центры распределения, σ — общая дисперсия. Н. В. Смирнов

3992. Наиболее строгие критерии и инвариантные критерии. Миясава (Most stringent tests and invariant tests. Miyasawa Koichi), 九州大學理學部紀要 (Кюсю дайгаку ригаку-бу киё, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ.), 1953, A, 8, № 1, 57—88 (англ.)

В первой части работы доказываются свойства равномерной наибольшей мощности и наибольшей строгости некоторых критериев проверки гипотез о значении среднего и дисперсии нормального закона распределения. Определение наиболее строгого критерия принадлежит Вальду (On the principles of statistical inferences, Notre Dame Math. Lectures 1942, № 1) и состоит в следующем. Критерием для гипотезы H называется борелевская функция $\varphi(x)$, определенная в выборочном пространстве R и принимающая значения из $[0, 1]$. Если x — выборочное значение, то гипотеза H отвергается с вероятностью $\varphi(x)$. Пусть $\beta(\theta, x)$ — функция мощности критерия, $\beta(\theta, x) = \int \varphi(x) P(dx, \theta)$, где $P(A, \theta)$ — распределение в R, зависящее от параметра θ.

Для проверки гипотезы H в пространстве Ω возможных значений параметра θ назначаются два множества: ω_a — область приема и ω_r — область отказа от гипотезы H. Пусть Φ_α — множество всех критериев φ, для которых $\beta(\theta, \varphi) \leqslant \alpha$ для всех $\theta \in \omega_a$, и $\beta^*(\theta) = \sup_{\varphi \in \Phi_\alpha} \beta(\theta, \varphi)$.

Критерий φ_0 называется наиболее строгим, если $\sup_{\theta \in \omega_r} [\beta^*(\theta) - \beta(\theta, \varphi_0)] = \min_{\varphi \in \Phi_\alpha} \sup_{\theta \in \omega_r} [\beta^*(\theta) - \beta(\theta, \varphi)]$.

Вот один результат работы.

Теорема 3. Если произведена выборка объема n из нормальной $(\xi, 1)$ генеральной совокупности с неизвестной средней ξ, то для гипотезы H: $\xi \in \omega_a$ и альтернативы K: $\xi \in \omega_r$, где $\omega_a = \{\xi; |\xi| \leqslant \rho_1\}$, $\omega_r = \{\xi; |\xi| \geqslant \rho_2\}$, $0 \leqslant \rho_1 < \rho_2$, наиболее строгий критерий φ_0 в Φ_α определяется соотношениями: $\varphi_0(\bar{x}) = 1$, если $|\bar{x}| \geqslant c$, $\varphi_0(\bar{x}) = 0$, если $|\bar{x}| < c$, где $\bar{x}$ — выборочная средняя и число c определяется из соотношения

$$\left(\frac{n}{2\pi}\right)^{1/2} \int\limits_{|\bar{x}| > c} \exp\left[-\frac{n}{2}(\bar{x} - \rho_1)^2\right] d\bar{x} = \alpha.$$

Во второй части работы вводится понятие инвариантного критерия и доказывается ряд теорем о наиболее строгих и равномерно наиболее мощных критериях в классах критериев, инвариантных относительно заданных групп преобразований. И. И. Гихман

3993. Последовательный процесс для статистических выводов. 5. Китагава (Successive process of statistical inferences. 5. Kitagawa Tosio), 九州大學理學部紀要 (Кюсю дайгаку ригаку-бу киё, Mem. Fac. Sci. Kynshu Univ.), 1953, **A7**, № 2, 81—106 (англ.)

Пятый мемуар автора, относящийся к серии, посвященной обзору результатов и исследованию последовательных процессов для решения различных статистических задач (Kitagawa T., Mem. Fac. Sci., Kynshu Univ., 1) 1950, **A5**, 139—180; 2) 1951, **A6**, 55—95;

3) 1952, **A7**, 131—155; 4) Bull. Math. Statist., 1952, 35—50). В первой части мемуара излагаются вопросы последовательных процедур для обобщенной схемы дисперсионного анализа. Во второй части рассматриваются различные подходы к использованию имеющейся информации для последовательных процессов. Н. В. Смирнов

3994. Последовательный процесс для статистических выводов. 6. Китагава (Successive process of statistical inferences. 6. Kitagawa Tosio), 九州大學理學部紀要 (Кюсю дайгаку ригаку-бу киё, Mem. Fac. Sci. Kyushy Univ). 1953, **A8**, № 1, 1—29 (англ.)

Продолжение мемуара (5) (реф. 3993). В первой части излагаются вопросы прогноза в последовательном анализе и теория функций риска. Во второй части рассматриваются технико-вычислительные задачи, связанные с применением последовательного дисперсионного анализа. Н. В. Смирнов

3995. Математическое обоснование графического метода множественной корреляции Бина. Фут (The mathematical basis for the bean method of graphic multiple correlation. Foote Richard J.), J. Amer. Statist., Assoc., 1953, **48**, № 264, 778—788 (англ.)

Показывается, что графический метод множественной корреляции, предложенный Бином (Bean Louis H., J. Amer. Statist. Assoc., 1929, **24**, 386—397), приводит к решению, получающемуся по методу наименьших квадратов итеративным процессом. Изложение элементарное, нестрогое, проводится на примере линейной корреляции 3—4 переменных. Я. И. Лукомский

3996. Три работы по математической статистике. Лоренц (Drei mathematisch-statistische Arbeiten. Lorenz Paul), Wiss. Z. Humbold-Univ. Berlin, Math.-naturwiss., 1953/54, **3**, 349—359 (нем.)

3997. Функция нормального распределения: таблицы некоторых отношений и их обратных величин (The normal probability function: tables of certain area-ordinate ratios and of their reciprocals), Biometrika, 1955, **42**, № 1—2, 217—222 (англ.)

Для аргумента $X = 0{,}00\,(0{,}01)\,4{,}00\,(0{,}05)\,5{,}00$ даются таблицы отношений Q/Z, Z/P и Z/Q, где $Z(X)$ и $P(X)$ — соответственно плотность и функция нормального распределения с параметрами (0,1), а $Q(X) = 1 - P(X)$. Кроме того, для $X = 0{,}00\,(0{,}01)\,3{,}00$ табулировано отношение P/Z. Значения Z/P указаны с пятью значащими цифрами, а значения остальных отношений — с пятью десятичными знаками. В большинстве случаев таблицы допускают линейную интерполяцию, однако для некоторых значений X может потребоваться квадратичная интерполяция по Эверетту. Л. Н. Большев

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРЕТИКО-ВЕРОЯТНОСТНЫХ И СТАТИСТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ В ТЕХНИКЕ

3998. Расчет надежности электронного оборудования. Беннер, Мередит (Designing reliability into electronic circuits. Benner A. H., Meredith B.), Proc. Nat. Electronics Conf., 1954, **10**, 137—145 (англ.)

Рассматривается некоторый комплекс электронных приборов, характеристики которых являются случайными величинами. Делается попытка отыскать распределение параметров этого комплекса, являющихся известными функциями характеристик отдельных приборов, и вычислить вероятность того, что комплекс не выйдет из строя в течение заданного промежутка времени. Во всех случаях безоговорочно применяется метод линеаризации и все случайные величины предполагаются независимыми и нормальными. Л. Н. Большев

3999. Одинарный статистический приемочный контроль. Сираждинов С. Х. Тр. Ин-та матем. и механики АН УзССР, 1955, **15**, 41—56

Рассматривается статистический приемочный контроль по качественному признаку с помощью однократной выборки. Предполагается, что каждое изделие в предъявленной к приемке партии может быть либо годным, либо дефектным. Пусть n — объем выборки и c — допустимое число дефектных изделий в выборке. Для $c \neq 0$ в работе даются оценки общего числа дефектных изделий в принятых партиях и в партиях, предъявленных к приемке (случай $c = 0$ рассмотрен в статье А. Н. Колмогорова «Статистический приемочный контроль при допустимом числе дефектных изделий, равном нулю», 1951, изд. Ленингр. дома научн.-техн. пропаганды). Приведены таблицы, облегчающие вычисление указанных оценок для $c = 0(1)10$. Л. Н. Большев

4000. К вопросу о рациональных методах контроля продукции. Эйдельнант М. И. Тр. Ин-та матем. и механики АН УзССР, 1955, **15**, 57—68

Рассматривается статистический приемочный контроль с помощью однократной выборки. Ставится задача отыскания таких значений параметров n и d (n — объем выборки, d—допустимое число дефектных изделий), для которых математическое ожидание экономических потерь будет наименьшим; затраты на контроль одного изделия, ущерб от приемки дефектного изделия и ущерб от выбраковки одного изделия считаются заданными. Предполагается, что число дефектных изделий в предъявленной к приемке партии подчиняется биномиальному распределению. Автор приходит к известному выводу, что это допущение фактически исключает выборочный контроль, так как в этом случае экономически наиболее выгодным оказывается либо сплошной контроль всей партии, либо приемка всей партии, либо, наконец, браковка всей партии, без выборочного контроля. Особо рассматривается случай, когда математическое ожидание числа дефектных изделий в партии неизвестно. Показано, что только в этом случае целесообразен выборочный контроль. Указан метод выбора n при заданном d. В статье имеются опечатки. В конце § 2 сказано, что в § 4 будут приведены «таблицы для практических применений в частном, но важном случае $d = 0$». Эти таблицы в статье отсутствуют. Л. Н. Большев

См. также: 3547, 3571, 3572, 3665, 3781, 3943

ГЕОМЕТРИЯ

4001. Юбилей теории относительности. (Конференция в Берне). Мак-Крей (Jubilee of relativity theory. Conference at Berne. McCrea W. H.), Nature, 1955, **176**, № 4477, 330—331 (англ.)

4002. О научном направлении кафедры дифференциальной геометрии МГУ. Фиников С. П., Успехи матем. наук, 1954, **9**, № 4, 3—18

Обзор развития дифференциальной геометрии за советский период от работ по теории поверхностей и конгруэнций, через развитие тензорной школы с новой тематикой изучения риманова пространства, с одной стороны, школы проективно-дифференциальной геометрии, с другой,— к современному теоретико-групповому направлению в дифференциальной гео-

метрии и связанным с этим большим проблемам дифференциально-геометрических объектов. Библ. 83 назв.
К. Н. Тихоцкий

4003. Замечания к проективной дифференциальной геометрии. Чех (Remarques au sujet de la géométrie différentielle projective. Čech E.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, 5, Suppl., 137—144 (франц.; рез. русс.)

Краткий обзор исследований по проективному изгибанию. Понятие проективного изгибания было введено Фубини в 1916 г. В 1920 г. Картан доказал теоремы существования для основных проблем этой теории при помощи пфаффовых систем в инволюции. Автор несколько дополнил результаты Картана в 1924 и 1931 гг. На протяжении последовавших двадцати лет не прибавилось ничего существенно нового. Недавно автор разработал общую теорию проективных свойств преобразований, которая позволила найти новые геометрические свойства прективного изгибания. Эти последние работы опубликованы в серии статей в Чехословацком математическом журнале за 1952 г.
Я. П. Бланк

4004. Инволюция и эквивалентность. Райнич (Involution and equivalence. Rainich G. Y.), Michigan Math. J., 1953—1954, **2**, № 1, 33—34 (англ.)

Заметка общего характера, примыкающая к предыдущей работе автора (РЖМат, 1954, 5225). Рассматривается связь соотношений эквивалентности в некотором множестве элементов и инволюционных преобразований, определяющихся весьма близкими условиями.
И. М. Яглом

4005. Приближенное построение логарифмических спиралей. Коростелев Л. В. В сб.: Исследования в области металлорежущих станков, 1955, вып. 3, М., Машгиз, 209—213

Рассматривается вопрос о замене дуги логарифмической спирали дугой окружности, проходящей через концы заданной дуги. При этом ставятся некоторые дополнительные требования с целью уменьшения допускаемой погрешности.
М. В. Потоцкий

4006. О проекционном соответствии винтовой линии и циклоиды. Бурдин Н. К., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1955, **32**, 3—9

Различные виды циклоиды в работе получены при помощи косоугольного проектирования цилиндрической винтовой линии, ось которой перпендикулярна к плоскости H, на профильную или вертикально-проектирующую плоскости. Вид циклоиды зависит от направления проектирования, плоскости проекций и шага винтовой линии.
А. Р. Зенгин

4007. Система обозначений для векторов и тензоров. Пауэлл (A notation for vectors and tensors. Powell F. C.), Proc. Cambridge Philos. Soc., 1955, **51**, № 3, 449—453 (англ.)

Предлагается обозначать контравариантный вектор U^α через $U^\cdot$, ковариантный — через $V_\cdot$, тензор $T^{\alpha\beta}_\gamma$ через $T^{\cdot\cdot}_{\cdot}$ и т. д. Если не требуется указывать точно характер тензора, его обозначают жирной буквой **T** без значков. Операцию свертывания по соседним значкам обозначают точкой, например $T^{\cdot\cdot}_{\alpha}S^{\alpha}_{\cdot} = T^{\cdot\cdot}_{\cdot}\cdot S^{\cdot}_{\cdot} = \mathbf{T}\cdot S$, но для выражения $T^{\cdot\alpha}_{\cdot}S^{\cdot}_{\alpha}$ это обозначение не рекомендуется. С целью сокращения записи некоторых формул рекомендуется знак $\times$, обозначающий двойственный тензор. Для ковариантного тензора **T** валентности t выражение $\times\,\mathbf{T}$ обозначает относительный тензор валентности $n-t$ веса $+1$

$$\times\, T^{+\rho\sigma\ldots} = \varepsilon_{\rho\sigma\ldots\lambda\mu\ldots} T^{\lambda\mu\ldots}/t!$$

и для контравариантного соответственно веса -1

$$\times\, T^{-}_{\rho\sigma\ldots} = \varepsilon_{\rho\sigma\ldots\lambda\mu\ldots} T^{\lambda\mu\ldots}/t!$$

Выводятся правила действий с тензором $\times\,\mathbf{T}$. Для обозначения дифференциальных операций рекомендуется оператор $\partial^{\cdot}_{\cdot} = \partial/\partial x^{\cdot}$ помечать штрихами (∂', ∂'' и т. д.), причем в произведении ∂ со штрихами действует на множители, помеченные тем же числом штрихов, а ∂ без штрихов действует на все множители. Предлагаемая система обозначений иллюстрируется примерами из механики, электродинамики и специальной теории относительности.
Л. Л. Вербицкий

4008. Естественное геометрическое объяснение комплексных решений в некоторых геометрических задачах. Москович (O interpretare geometrică naturală a soluțiilor complexe din unele probleme de geometrie. Moscovici Moses), Comun. Acad. R. P. R., 1955, 5, № 6, 943—947 (рум.; рез. русс., франц.)

4009. Комментарии к преподаванию тригонометрии. Хиккерсон (Comments on the teaching of trigonometry. Hickerson T. F.), J. Elisha Mitchel Scient. Soc., 1954, **70**, № 2, 228—230 (англ.)

Формулы для решения треугольников выводятся с помощью теоремы о проекции замкнутой ломаной. Отмечается, что применение формулы

$$\operatorname{tg} C = c\sin A/b - c\cos A$$

вместо теоремы тангенсов позволяет избежать вычисления малых разностей чисел при близких значениях b и c.
Л. Л. Вербицкий

4010. Опыт классификации доказательств теоремы Пифагора. Натуччи (Saggio di una classifica delle dimostrazioni del teorema di Pitagora. Natucci Alpinolo), Archimede, 1954, **6**, № 6, 229—234 (итал.)

Заканчивается классификация доказательств теоремы Пифагора, данная автором в № 4, 5 данного журнала (РЖМат, 1956, 2363).
С. И. Зетель

4011. О стереометрических неравенствах. Петрович (Стереометриске неједначине. Петровић Михајло), Зб. радова. Српска АН, 1953, **35**, № 3, 1—4 (серб.; рез. франц.)

Элементарным путем доказываются неравенства; например $\frac{2\pi}{3}h\rho^2 \leqslant V_1 \leqslant \frac{5\pi}{3}h\rho^2$, где V — объем усеченного конуса, ρ — радиус среднего круга и h — высота.

Работа написана как приложение к гимназическому учебнику геометрии.
Е. А. Морозова

4012. Замечательные формулы для треугольника центров квадратов, построенных на сторонах треугольника. Кавалларо (Formules remarquables pour le triangle des centres des carrés construits sur les côtés d'un triangle. Cavallaro Vincenzo G.), Mathesis, 1954, **63**, № 9—10, 357—363 (франц.)

Выведены формулы для треугольника центров квадратов, построенных на сторонах треугольника. Например: Если X, Y, Z являются центрами квадратов, построенных на сторонах $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ треугольника, имеющего площадь S, и x, y, z и Q являются сторонами YZ, ZX, XY и площадью треугольника XYZ, а ω и $\bar{\omega}$ являются углами Брокера треугольника ABC и XYZ, то имеют место формулы:

$$x^2 + y^2 + b^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 6S,$$
$$a^2 + b^2 + c^2 = 8(Q - S),$$
$$\operatorname{cotg}\omega = \frac{2Q}{S} - 2, \quad \operatorname{cotg}\bar{\omega} = 2 - \frac{S}{2Q},$$

$$\operatorname{cotg}\frac{\omega}{3}=\frac{2\operatorname{cotg}\omega+3}{\operatorname{cotg}\omega+2},\quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{3}=\frac{1+22\operatorname{tg}\omega}{2+3\operatorname{tg}\omega}$$ и т. д.

Даны также формулы, связывающие вышеперечисленные величины с радиусами окружностей, вписанных и описанных относительно указанных треугольников. А. А. Берадзе

4013. О некоторых теоремах, относящихся к треугольнику и окружности девяти точек. Грейфф-Браво (Sobre algunos teoremas en el triangulo y el circulo de nueve puntos. Greiff Bravo Luis de), Rev. mat. elementales, 1954, **3**, № 3—4, 48—53 (исп.)

Доказываются теорема Карно в случае пересечения треугольников окружностью, теорема Эйлера: во всяком треугольнике основания высот, медиан и середины отрезков высот от вершины треугольника до ортоцентра (девять точек) лежат на одной и той же окружности, и другие элементарные теоремы. Новых результатов в статье нет. И. Н. Григорьев

4014. Об одном свойстве n-угольников, полученных аффинным преобразованием правильного n-угольника. Барлотти (Una proprietà degli n-agoni che si ottengono trasformando in una affinità un n-agono regolare. Barlotti Adriano), Boll. Unione mat. ital., 1955, **10**, № 1, 96—98 (итал.)

На сторонах выпуклого n-угольника строятся правильные n-угольники, внешние и внутренние относительно данного. Центры этих многоугольников служат вершинами правильного многоугольника лишь в том случае, если данный многоугольник получен аффинным преобразованием из правильного n-угольника. Я. П. Бланк

4015. Об одной геометрической задаче. Меннесье (Pour les enseignements moyen et normal. Sur un problème de géométrie. Mennessier H. L.), Mathesis, 1955, **64**, № 1—2, 23—26 (франц.)

Дано решение задачи: показать, что произвольная секущая, проведенная через вершину A квадрата $ABCD$, со стороной c, пересекает стороны CB, CD в точках E, F так, что $1/AE^2+1/AF^2=1/c^2$. С. П. Фиников

4016. О точке Микеля. Гурматай (Sur le point de Miquel. Goormaghtigh R.), Mathesis, 1955, **64**, № 1—2, 9—13 (франц.)

Рассматривается на плоскости полный четырехсторонник, образованный сторонами треугольника, вписанного в единичную окружность, и какой-либо прямой Δ. Определяется комплексная координата так называемой точки Микеля, являющейся общей для окружностей, описанных около четырех треугольников данного четырехсторонника. На основе полученной формулы даются различные определения точек Микеля. Рассматриваются различные частные случаи расположения прямой Δ относительно данного треугольника. В. И. Ведерников

4017. Деление углов и окружностей на равные части. Акинфиев А. С., Тр. Тульск. механ. ин-та, 1955, № 7, 123—130

Пусть данный угол α требуется разделить на n равных частей. Вокруг вершины угла α, как центра, вписывают в α дуги AB и CD соответственно радиусов nr и pr, где r — произвольный отрезок, а число p выбирается так, чтобы при помощи циркуля и линейки $\overset{\frown}{CD}$ легко делилась бы на p равных частей. Если l — длина хорды, стягивающей $\overset{\frown}{CD}/p$, то часть $\overset{\frown}{AB}$, стягиваемая хордой длины l, определяет (приближенно) n-ю часть β угла α. Показывается, что

$$\beta=\frac{\alpha}{n}-\frac{n^2-p^2}{24n^3p^2}\alpha^3+\cdots.$$

Рассматриваются примеры, приводится схема выбора числа p в некоторых конкретных случаях. К. К. Мокрищев

4018. Относительно одной конфигурации («нож») Архимеда. Тебо (A propos du tranchet d'Archimède. Thébault Victor), Enseign. math., 1951—1954 (1955), **40**, 62—69 (франц.)

Рассматривается конфигурация кругов, для которой конфигурация Архимеда является частным случаем. Через концы A и B хорды круга (O) радиуса R проводятся два произвольных круга (O_1) и (O_2) радиусов R_1 и R_2, касающихся внутренним образом данного круга в точках A и B (в концах хорды), и окружности (ω_1) и (ω_2) радиусов ρ_1 и ρ_2, которые касаются кругов (O), (O_1) и (O_2). Если хорда совпадает с диаметром, конфигурация переходит в конфигурацию Архимеда. Если $OO_1=a$; $OO_2=b$; $\theta=$ угол (AB, AO), то доказано, что

$$\frac{1}{\rho_1}+\frac{1}{\rho_2}=\frac{2}{\cos^2\theta}\left[\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1+\sin^2\theta}{R}\right].$$

В случае конфигурации Архимеда $\frac{1}{\rho_1}=\frac{1}{\rho_2}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{R}$. Изучаются различные свойства конфигурации. С. И. Зетель

4019. Аффинные построения. Коршунов Е., Сб. студ. работ Тамбовск. гос. пед. ин-та, 1953, вып. 1, 50—71

Приводится большое число аффинных задач и дается их решение. Автор использует для построения «параллельную линейку» — две параллельные односторонние линейки, закрепленные в виде параллелограмма шарнирами. Доказывается эквивалентность этого инструмента односторонней линейке при параллелограмме, данном в плоскости чертежа. Показано практическое преимущество «параллельной линейки». Среди приведенных 51 задачи много оригинальных. С. И. Зетель

4020 К. К вопросу о физическом истолковании геометрии Лобачевского. Чарин В. С. (Лекция для студентов физико-математического факультета), Уральский ун-т, Свердловск, 1955, 16 стр.

4021 К. Методы и теории для решения задач на геометрические построения. Петерсен (Métodos y teorías para la resolución de los problemes construcciones geometricas. Petersen J., Madrid, Ed. Giner, Venta, 1955, 239 p.), Bibliogr. hispánica, 1955, **14**, № 6, 154 (исп.)

ПРОЕКТИВНАЯ И НАЧЕРТАТЕЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4022. Элементарное чисто синтетическое доказательство теоремы Шлёфли о двойственных шестерках. Ямасита (An elementary and purely synthetic proof for the double six theorem of Schläfli. Yamashita Chitose), Tôhoku Math. J., 1954, **5**, № 3, 215—219 (англ.)

Доказательство теоремы основано на леммах:

Лемма I. Каждая прямая, пересекающая три скрещивающиеся прямые из данной четверки, пересекает и четвертую.

Лемма II. Если четверка скрещивающихся прямых a_1, a_2, a_3, a_4 пересечена прямой b_6, то обязательно существует другая прямая b_5, отличная от b_6, пересекающая a_1, a_2, a_3, a_4 при условии, что ряд точек $b_6(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и пучок плоскостей $b_6(a_1, a_2, a_3, a_4)$ не проективен. Приводится большая библиография, посвященная теореме Шлёфли. С. И. Зетель

4023. По поводу циклических инволюций. Дервидюэ (A propos des involutions cycliques. Der-

widué L.), Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1953, 22, № 1, 24—28 (франц.)

Приводится другое доказательство одного из предложений, полученных автором в предыдущей работе (Mém. in 8° Soc. roy. Sci. Liège, 1951, sér. 4, 11, fasc. V). Рассматривается алгебраическое неприводимое многообразие V, без особенностей, преобразуемое в себя циклической инволюцией порядка v. В цитированной работе автором построено многообразие W, без особенностей находящееся с V в соответствии $(1, v)$. Показывается, что можно построить для V и W бирациональные образы V_0 и W_0, связанные между собой рациональным соответствием ω_0, не имеющим базы ни на V_0, ни на W_0. И. З. Розенкноп

4024. Вопросы преобразования проекций в связи с коллинеарными преобразованиями плоских полей. Виксель А. А., Вальков К. И., 13-я научная конференция Ленингр. инж.-строит. ин-та, Л., 1955, 265—267

Исследуя преобразования проекций пространственных образов с проективной точки зрения, авторы рассматривают коллинеарное соответствие совмещенных плоских полей и приходят к общей схеме построения новых проекций объектов по их старым проекциям. Указывается, что с этой общей точки зрения можно рассматривать и решения чисто практических задач, как то: построение проекций линий пересечения поверхностей призм, пирамид, цилиндров и конусов; построение по собственным теням теней падающих и т. д. А. Р. Зенгин

4025. Построение главного треугольника следов произвольной аксонометрической системы. Мчедлишвили Е., Тр. Тбилис. ун-та, 1954, 52, 73—81 (рез. груз.)

Рассматривается задача о построении главного треугольника следов для данной аксонометрической системы. Предлагаемое решение основано на построении круговых сечений эллиптического цилиндра, образующие которого параллельны направлению проектирования натуральной системы осей координат. Н. Ф. Четверухин

4026. Графические приемы построения точек на касательных к кривым второго порядка. Дешевой Г. М., Тр. Ленингр. технол. ин-та им. Ленсовета, 1954, № 28, 20—25

Рассматриваются приемы построения циркулем и линейкой точки прикосновения данной касательной к кривой второго порядка, а также некоторые другие элементарно-геометрические задачи с кривыми второго порядка. Н. Ф. Четверухин

4027. Интерпретация геометрии Лобачевского на двуполостном гиперболоиде. Михэйляну (Interpretarea geometriei lui Lobacevski pe un iperboloid cu două pînze. Mihăileanu N.), Comun. Acad. R. P. R., 1954, 4, № 11, 579—580 (рум.; рез. русс., франц.)

На одной из полостей S двуполостного гиперболоида с центром в O, при помощи ряда введенных понятий, автор строит геометрию, совпадающую с геометрией на плоскости Лобачевского. «Прямой» названо пересечение полости S с плоскостью, проходящей через O. Две «прямые» параллельны, если плоскости, определяющие их, пересекаются по образующей асимптотического конуса C данного гиперболоида. Тогда через каждую точку A проходят две прямые, параллельные заданной прямой. Введено понятие расстояния между двумя точками M_1 и M_2, принадлежащими S,

$$(M_1M_2) = c \log (m_1m_2,\ u,v),$$

где m_1 и m_2 — прямые OM_1 и OM_2, u и v — образующие конуса C, по которым последний пересекается с плоскостью OM_1M_2, c — постоянная, зависящая от гиперболоида. Определяются понятия «окружности», орицикла, эквидистанты. Н. М. Остиану

4028 К. Альбом чертежей по начертательной геометрии, 18 л., М., Всес. заоч. инж.-строит. ин-т, 1955, Б. ц.

АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

4029. Об одном двойном семействе тетраэдров. Мармьон (Sur une double famille de tétraèdres. Marmion Alphonse), C. r. Acad. sci., 1955, 240, № 24, 2288—2290 (франц.)

Пусть H — однополостный гиперболоид вращения с равнобочным меридианом. Произвольные 4 прямолинейные образующие служат высотами тетраэдра T (H — «гиперболоид высот» для T). Строится «присоединенный» к T тетраэдр T': плоскости граней T' являются плоскостями горловых сечений 4 гиперболоидов вращения с равнобочными меридианами, сопряженных с T, а высоты T' суть оси этих 4 гиперболоидов (Marmion A., C. r. Acad. sci., 1950, 230, 1924—1926). Тетраэдры T и T' являются членами двойного семейства тетраэдров с общим для всех гиперболоидом высот H и попарно симметричных относительно центра H.

Рассматривается ряд свойств этого семейства, а также связанные с ним алгебраические кривые и поверхности. Например, в каждом из двух семейств, (T) или (T'), вершины тетраэдров лежат на рациональной пространственной кривой 4-го порядка C_4, огибающая граней есть развертывающаяся поверхность 6-го порядка, ребра заполняют линейчатую поверхность 9-го порядка, для которой C_4 является тройной кривой, и т. д. Никаких указаний на доказательства нет. А. С. Лейбин

4030. Исследование коноида 5-го порядка, образованного вершинами гиперболических параболоидов, проходящих через две перпендикулярные прямые. Машек (Studie o konoidu 5. stupně vytvořeném vrcholy hyperbolických paraboloidů jdoucích dvěma kolmými mimoběžkami. Mašek Vladimír), Časop. pěstov. mat., 1954, 79, № 3, 229—248 (чеш.)

Автор рассматривает плоские сечения коноида 5-го порядка, который образован вершинами двупараметрической системы гиперболических параболоидов, принадлежащих одной линейной конгруэнции с перпендикулярными директрисами. Приводятся свойства этих плоских сечений для различных положений секущей плоскости и исследуются их проекции, для которых дается кинематическое образование. Zbyněk Nádeník.

4031. Кривые шестого порядка, инвариантные относительно инверсий с тремя главными точками. Магел (Sextiky invariantí vzhledem ke kvadratickým inversím s třemi body hlavními. Mahel Vladimír), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 3, 284—298 (чеш.; рез. русс., нем.)

Квадратичной инверсией с тремя главными точками называется преобразование $x_1 : x_2 : x_3 = x_1'x_3' : x_2'x_3' : \rho x_1'x_2'$ $(\rho \neq 0)$ на проективной плоскости. Базисные точки O_1, O_2, O_3 называются главными точками инверсии, причем точка O_3 называется центром инверсии. Инверсия оставляет неподвижными точки кривой второго порядка $x_3^2 - \rho x_1x_2 = 0$. Инверсия переводит в себя кривые шестого порядка 3 классов: А) кривая имеет четырехкратную точку в центре инверсии и обыкновенные точки в остальных главных точках, В) кривая имеет двойные точки во всех главных

точках, C) кривая не проходит через центр инверсии и имеет тройные точки в остальных главных точках. Находятся условия, которым удовлетворяют коэффициенты кривой шестого порядка этих 3 классов. Далее рассматривается перевод кривой шестого порядка в себя несколькими инверсиями с общими главными точками. Здесь возможны два случая: 1) инверсии имеют общий центр, 2) центр одной инверсии совпадает с главной точкой другой инверсии. Показывается, что кривые класса A не переводятся в себя несколькими инверсиями с тем же центром и главными точками, кривые класса B при некоторых дополнительных условиях переводятся в себя двумя инверсиями с общим центром, или тремя инверсиями, центр каждой из которых совпадает с главными точками других, кривые класса C при некоторых дополнительных условиях переводятся в себя тремя инверсиями с общим центром. Максимальное число инверсий с общими главными точками, переводящих в себя кривую шестого порядка, равно 6; кривые в этом случае — класса B. Находятся дальнейшие свойства инвариантных кривых и их особых точек.

František Vyčichlo

4032. Поверхность, образованная фокусами конических сечений плюккерова коноида. Ничe (Die Brennpunktsfläche der Kegelschnitte des Plückerschen Konoids. Ničе Vilko), Glasnik mat.-fiz. i astron., 1954, **9**, № 3—4, 251—257 (нем.; рез. хорв.)

Поверхность, образованная фокусами конических сечений плюккерова коноида, есть конхоидальная поверхность 6-го (автор ошибочно утверждает, что 4-го) порядка, которая может быть получена таким построением: на лучах гиперболической линейной конгруэнции, директрисами которой являются торсовые образующие коноида, берутся точки, отстоящие от центров лучей на расстояниях, равных половине расстояния между торсовыми образующими. Сечения этой поверхности плоскостями, параллельными направляющей плоскости коноида, суть эллипсы с осями, лежащими в плоскостях симметрии коноида. В сечении с самим коноидом эта поверхность дает кривую, которая распадается на три двойных прямых (одна из них несобственная) и две симметричных пространственных кривых 6-го порядка. Доказательства — синтетические.

Р. Н. Щербаков

4033. Об общих алгебраических функциях двух переменных, имеющих одну и ту же кривую ветвления и бирационально различных. Турри (Sulle funzioni algebriche generali di due variabili colla stessa curva di diramazione e birazionalmente distinte. Turri Tullio), Rend. Sem. Fac. Sci. Univ. Cagliari, 1953, **23**, 9—15 (итал.)

4034. О многообразиях Веронезе. Мураккини (Sulle varietà del Veronese. Muracchini Luigi), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 412—416 (итал.)

Понятие квазиасимптотической кривой риманова пространства V_k, погруженного в V_m, введено Бомпьяни (Bompiani, Mem. Accad. Lincei, 1921, ser. 5, **13**). Основная теорема Бомпьяни, характеризующая многообразия Веронезе, гласит: Если некоторое V_k не удовлетворяет уравнению Лапласа, т. е. имеет $S(2)$ регулярных соприкасающихся, и обладает ∞^{2k-2} квазиасимптотических кривых $\gamma_{1,3}$, то существует $V_k^{2k} \subset S_{k(k+3)/2}$, представляющее квадрику V_{k-1}^2 в S_k.

Автор рассматривает квазиасимптотические многообразия V_h в V_k, обозначаемые $\sigma^{\tau}_{s-1,s+1}$, где $\tau = C^{s+1}_{s+h}$ $(1 \leqslant h \leqslant k+1)$, и получает обобщение теоремы Бомпьяни: Если некоторое V_k имеет $S(s)$ регулярных соприкасающихся в каждой своей точке и обладает $\infty^{(h+1)(k-h)}$ квазиасимптотических многообразий $\sigma^{\tau}_{s-1,s+1}$, то существует $V_k^{s^k} \subset S_N$, представляющее гиперповерхность V^s_{k-1} в S_k; здесь $N = (s+1)\ldots(s+k)/k! - 1$. Указывается, что доказательство может быть проведено индукцией по h; при $h=1$ имеем теорему Веронезе. Подробное проведение доказательства дано для случая $k=3$, $h=2$, $s=2$.

Н. М. Бескин

4035. О перекрывающихся алгебраических поверхностях. Найт (On overlapped algebraic surfaces. Knight A. J.), J. London Math. Soc., 1954, **29**, part 1, № 113, 43—48 (англ.)

На алгебраической поверхности F выбирается базис одномерных слабых гомологий $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ и дуальный ему базис трехмерных слабых гомологий $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_s$, так что их индексы пересечения связаны соотношением $(\gamma_i \cdot \Gamma_i) = \delta_{ij}$. Каждому двумерному классу гомологий C ставится в соответствие матрица $a(C)$, определяемая соотношением $\Gamma_i \cdot C \sim \Sigma a_{ij}\gamma_j$, где $\Gamma_i \cdot C$ означает пересечение Γ_i и C, а $\sim$ — слабую гомологичность. В подгруппе двумерной группы гомологий, порожденной алгебраическими кривыми поверхности F, рассматривается подгруппа Q, состоящая из тех циклов C, для которых $a(C) = 0$. Если в группе Q имеются не гомологичные 0 циклы, индекс пересечения которых с любым циклом из Q равен 0, то поверхность F называется согласно Скотту (Scott D. B., Proc. London Math. Soc., (2) 1950, **51**, 308—324) перекрывающейся. Автор доказывает, что поверхность является перекрывающейся тогда и только тогда, когда она содержит пучок алгебраических кривых максимального рода (определение этого понятия см. РЖМат, 1954, 4152).

И. Р. Шафаревич

4036. Специализации и дифференцирования. Приложение к определению характеристического цикла дивизора. Бугон (Spécialisations et dérivations. Application à la définition du cycle caractéristique d'un diviseur. Boughon Pierre), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 11, 1185—1187 (франц.)

Рассматривается однопараметрическое семейство F гиперповерхностей в пространстве над полем k с координатами $x_1, \ldots, x_m$ и кривая Θ^1 в пространстве с координатами $u_1, \ldots, u_n$, точки которой соответствуют гиперповерхностям F. Если P и P' — две независимые общие точки Θ^1, а C_P и C'_P — соответствующие им гиперповерхности из F, то специализация пересечения $C_P C_{P'}$, продолжающая специализацию $P' \to P$ над $k(P)$, называется характеристическим циклом семейства F. Характеристический цикл всегда существует и определяется однозначно.

Доказывается, что если $\varphi(u_1 \ldots u_n x_1 \ldots x_m) = 0$ есть уравнение общей гиперповерхности из F, то цикл пересечения гиперповерхностей $\varphi(u_1 \ldots u_n x_1 \ldots x_m) = 0$, $D_1\varphi(u_1 \ldots u_n x_1 \ldots x_m) = 0$, когда он определен, совпадает с характеристическим циклом F. Здесь D_1 означает дифференцирование поля $k(x_1 \ldots x_m u_1 \ldots u_n)$ над $k(x_1 \ldots x_m)$, принимающее значение 1 в u_1, а $(u_1 \ldots u_n)$ — общую точку кривой Θ^1, выбранную так, что все u' сепарабельны и целы над $k(u_1)$.

И. Р. Шафаревич

4037. Гиперэллиптические поверхности в бидуальном S_3 и их представление многообразиями V_5 в комплексном S_7. Спампинато (Le superficie iperellittiche dell' S_3 biduale e la loro rappresentazione con varietà V_5 dell' S_7 complesso. Spampinato Nicolò), Rend. mat. e applic., 1954, **14**, № 1—2, 164—180 (итал.)

Дифференцируемая функция двух бидуальных переменных (см., например, РЖМат, 1955, 400, 941) $\lambda=xu+y\eta$, $\mu=zu+t\eta$ ($u^2=u$, $u\eta=\eta u=\eta$, $\eta^2=0$) имеет вид $F(\lambda,\mu)=f(x,z)\,u+[yf'_x(x,z)+tf'_z(x,z)+g(x,z)]\,\eta$. В частности, если $g\equiv 0$, то F называется продолжением функции $f(x,z)$ двух комплексных переменных в бидуальную область. Продолжения абелевых функций дают бидуальные абелевы функции. Продолжая параметрические уравнения гиперэллиптической поверхности в бидуальную область, автор получает бидуальные гиперэллиптические поверхности. Каждая такая поверхность — алгебраическая и может быть представлена посредством некоторого многообразия V_5 в комплексном S_7. Изучаются свойства таких многообразий.

В. В. Морозов

4038. Еще о характеристических классах и ковариантных многообразиях вложения. Весентини (Ancora sulle classi caratteristiche e sulle varietá covarianti d'immersione. Vesentini Edoardo), Atti Accad. naz. Lincei. Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1954, **17**, № 5, 196—203 (итал.)

Доказательство теоремы автора о совпадении характеристических классов гомологии пучка комплексных векторов, нормальных к P в V, с соответствующими классами гомологии, определенными в P элементами последовательности, обратной ковариантной последовательности вложения P в V, где P и V — неприводимые неособенные алгебраические многообразия, $P\subset V$ и $\dim P<\dim V$ (РЖМат, 1955, 4655), опиралось на предположение о существовании в V неприводимой и неособенной гиперповерхности V_1, проходящей через P и таким образом, как указал автору Том (Thom), налагало неявные ограничения на P и V. Освобождаясь от этого предположения, автор дает новое доказательство этой теоремы, показывается, что из теоремы Ходжа (вытекающей из результата автора, см. там же) и одной формулы Тодда (Todd, Proc. London Math. Soc., 1940, **46**, 199—230) просто следует формула Гамкрелидзе

$$\Gamma^{k-s}=\sum_{t=0}^{S}(-1)^t\binom{k-t+1}{k-s+1}\Pi_t^{k-s}$$

(РЖМат, 1954, 2061).

По поводу статьи Гамкрелидзе автор ссылается на рецензию Самельсона (Samelson, Math. Revs, 1954, **15**, 459) и дает неверную транскрипцию его фамилии Gankrelidze.

В. В. Морозов

4039. Условия унирациональности неприводимого алгебраического многообразия. Предонцан (Condizioni di unirazionalità per varietà algebriche irriducibili. Predonzan Arno), Atti IV congr. Unione mat. ital., 1953, **2**, 431—433 (итал.)

Приводятся различные условия унирациональности неприводимого алгебраического многообразия V_S размерности $s\geqslant 3$, установленные автором (Atti Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat. e natur., 1948, **5**, 238; Rend. Sem. mat. Univ. Padova, 1949, **18**, 163), Морином (Morin U., Atti Accad. naz. Lincei. Rend. cl. sci. fis., mat, e natur., 1936, **24**, 188 и 191; 1938, **27**, 330; Atti II congr. Unione mat. ital., Bologna, 1940, 298) и др. Указывается новый результат автора. Назовем V_s местом пространств с ядром h, если через каждую точку V_s проходит линейное пространство S_h, содержащееся в V_s, и совокупность всех содержащихся в V_s и проходящих через производящее S_h линейных пространств принадлежит к некоторому S_t ($t\geqslant h$) также содержащемуся в V_s. Для каждого n можно найти таких три целых $r_{n-2}<r_{n-1}<r_n$, что определенная над полем K неприводимая алгебраическая гиперповерхность V_{r-1} порядка n, не являющаяся местом пространств с ядром h при $r>r_n$, будет унирациональной над полем $K(S_{r_{n-1}})$, где $S_{r_{n-1}}$ — линейное пространство, содержащееся в V_{r-1}.

В. В. Морозов

4040. Об антижанрах алгебраического многообразия. Северн (Sugli antigeneri d'una varietà algebrica. Severi Francesco), Atti Accad. naz. Lincei Rend. Cl. sci. fis., mat. e natur., 1955, **18**, № 2, 131—140 (итал.)

В связи с работой Келера (там же, стр. 151) автор возвращается к введенному им ранее (Mem. della R. Acc. d'Italia, 1932, **3**, 1—52) понятию антижанра a неприводимого алгебраического многообразия V. Если $|C|$ — линейная система гиперповерхностей на V и $|C'|$ — ее присоединенная система, то $|C-C'|$ называется антиканонической системой, а ее размерность, уменьшенная на единицу — антижанром V. Исследованы антижанры рациональных поверхностей (р. п.). Существуют р. п., для которых $a=0, 1, 2, 3$; если порядок поверхности $m\geqslant 3$ и криволинейные сечения ее эллиптические (при этом $m\leqslant 9$), то $a=m+1$; если криволинейные сечения р. п.—рациональные кривые, то $a=9$, за исключением поверхности Веронезе и плоскости, для которых $a=10$. При бирациональном преобразовании a изменяется: если для некоторого класса бирационально эквивалентных поверхностей относительный их антижанр достигает максимума, то этот максимум называется абсолютным антижанром класса. Следующие типы поверхностей имеют отличный от нуля абсолютный антижанр (в скобках указано его значение): рациональные поверхности (10), поверхности с нулевой канонической кривой (1) и, возможно, поверхности, бирационально эквивалентные эллиптической линейчатой поверхности ($\leqslant 2$).

В. В. Морозов

4041. Числа Бетти пересечений гиперквадрик. Готье (Nombres de Betti des intersections complètes de formes quadratiques. Gauthier Luc), C. r. Acad. sci., 1955, **240**, № 19, 1851—1853 (франц.)

Пусть $V=V^{2p}_{n-p}$ — пересечение p гиперквадрик в n-мерном комплексном проективном пространстве. Числа Бетти B_i многообразия V при $i\neq n-p$ равны 1 при четном i и 0 при нечетном i. Число B_{n-p} может быть выражено с помощью эйлеровой характеристики χ. Приводится для χ следующая формула:

$$\chi=\frac{2^p}{(n-p)!}\left[\frac{d^{n-p}}{dx^{n-p}}\frac{(1+x)^{n+1}}{(1+2x)^p}\right]_{x=0}$$

Рассматриваются некоторые частные случаи. Так, при $p=(n-1)$, $(n-2)$ устанавливается связь с результатами Годо (Godeaux L., Bull. Acad. roy. Belgique, 1944, 262) относительно жанров соответствующих кривых или поверхностей. При $p=2, 3$ получаются некоторые результаты, указанные А. Вейлем (РЖМат, 1955, 2544).

И. З. Розенкноп

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ ТРЕХМЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

4042. Обобщение степени точки относительно центральных кривых второго порядка. Добреску (O extindere a puterii unui punct la conicele cu centru. Dobrescu Andrei), Gaz. mat. şi fiz., 1954, **A6**, № 7, 301—305 (рум.)

Степенью точки M относительно окружности называется произведение $MA\cdot MB$, где A и B — точки пересечения окружности с прямой, проходящей через точку M. Для центральной кривой второго порядка секущая заменяется двумя прямыми, проходящими

через точку $M(x_0, y_0)$ и параллельными двум сопряженным диаметрам данной кривой.

$$f(x, y) = 0. \qquad (1)$$

Доказана лемма:

$$I = \frac{1 + m^2}{a_{11} + 2a_{12}m + a_{22}m^2} + \frac{1 + m'^2}{a_{11} + 2a_{12}m' + a_{22}m'^2},$$

где m и m' — угловые коэффициенты двух сопряженных диаметров, а a_{11}, a_{12}, a_{22} — коэффициенты кривой (1), является инвариантом, равным отношению линейного и квадратного инвариантов кривой $I = \eta / \delta$. Отсюда для центральных кривых второго порядка выводится соотношение:

$$MA_1 \cdot MA_2 + MA_1' \cdot MA_2' = (\eta / \delta) f(x_0, y_0). \qquad (2)$$

Выражение, стоящее в левой части соотношения (2), для окружности равно удвоенному значению степени точки M. По аналогии, величина $MA_1 \cdot MA_2 + MA_1' \cdot MA_2'$, где A_1, A_2 и A_1', A_2' суть точки пересечения кривой (1) с двумя прямыми, проходящими через точку M и имеющими направления, названа степенью точки M относительно кривой (1). Для равносторонней гиперболы $\eta = 0$ и степень точки равна нулю.

Для центральной кривой получается известное из теоремы Аполлония соотношение длин двух сопряженных полудиаметров $M\overline{A}_1^2 + M\overline{A}_1'^2 = \eta\Delta / \delta^2$, где Δ — кубический инвариант кривой (1). Геометрическое место точек M постоянной степени относительно кривой второго порядка, отличной от равносторонней гиперболы, есть кривая второго порядка, гомотетическая и концентрическая с данной. Радикальной кривой двух линий второго порядка $f_1(x, y) = 0$ и $f_2(x, y) = 0$ является третья кривая $(\eta_1 / \delta_1) f_1(x, y) = (\eta_2 / \delta_2) f_2(x, y)$, принадлежащая пучку заданных кривых. Утверждение автора, что полученное обобщение не распространяется на поверхности второго порядка, опровергнуто Болдеску (см. реф. 4043). Н. М. Остиану

4043. О распространении понятия степени точки на центральные квадрики. Болдеску (Asupra extinderii noţiunii de putere a unui punct la cuadricele cu centru. Boldescu P.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 1, 17—19 (рум.)

Дано обобщение для центральных квадрик результатов, полученных Добреску (реф. 4042) для центральных кривых второго порядка. Рассматривается центральная поверхность второго порядка с центром в начале координат. Центро-афинным преобразованием

$$x' = X;\ y' = \sqrt{s_1/s_2}\, Y;\ z' = \sqrt{s_1/s_2}\, Z, \qquad (1)$$

где s_1, s_2, s_3 — корни характеристического уравнения, эта квадрика преобразуется в сферу

$$h(X, Y, Z) \equiv S_1(x^2 + y^2 + z^2) + \Delta / A_{44} = 0, \qquad (2)$$

где Δ — дискриминант поверхности, а A_{44} — дискриминант старших членов. Через произвольную точку $M_0(x_0', y_0', z_0')$ проводятся три прямые, соответственно параллельные трем сопряженным диаметрам квадрики, пересекающие квадрику в трех парах точек $(M_i' M_i'')$ $(i = 1, 2, 3)$. Подвергая эти точки и точку M преобразованию (1) и пользуясь уравнением сферы (2) и теоремой Аполлония о сумме сопряженных диаметров, автор получает соотношение

$$M_0M_1' \times M_0M_1'' + M_0M_2' \times M_0M_2'' + M_0M_3' \times M_0M_3'' = \frac{I}{A_{44}} f(x_0 y_0 z_0),$$

аналогичное выражению, полученному Добреску. Отсюда по аналогии следует определение понятия степени точки относительно центральной квадрики.

Автор упоминает, что для поверхностей второго порядка можно получить результаты, аналогичные всем тем результатам, которые получены Добреску для кривых второго порядка. Н. М. Остиану

4044. Кривые и поверхности параллельных в широком смысле. Миллер (Curbe şi suprafeţe paralele in sens larg. Myller A.), Studii şi cercetări ştiinţ., 1954, 5, № 1—2, 1—15 (рум.; рез. русс., франц.)

Между точками двух плоских кривых устанавливается взаимно однозначное соответствие по принципу параллельности касательных. Такие кривые названы параллельными вдоль семейства прямых D, соединяющих соответствующие точки. Они задаются уравнением в параметре углового коэффициента касательной $x = f(p)$, $y = g(p)$. Так как $g'(p) / f'(p) = p$, то уравнение принимает вид $x = F'(p)$; $y = pF'(p) - F(p)$, где $F(p) = \int f(p)\, dp$.

Отмечены следующие свойства кривых: а) три кривые семейства отсекают на прямых семейства пропорциональные отрезки; б) эволюты параллельных кривых являются параллельными кривыми. Понятие параллельности распространено автором на случай поверхностей и пространственных кривых. Указан критерий параллельности последних. Н. М. Остиану

4045. Геометрические свойства, связанные с линиями кривизны. Михэйляну (Proprietăţi geometrice în legătură cu liniile de curbură. Mihăileanu N.), Gaz. mat. şi fiz., 1955, **A7**, № 4, 170—173 (рум.)

Рассматриваются две формы $\varphi = ex^2 + 2fxy + gy^2$, $\psi = lx^2 + 2mxy + ny^2$, уподобляемые соответственно двум квадратичным формам поверхности. Общая пара соответственных лучей в двух инволюциях $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ называется парой линий кривизны. Известно, что две кривые второго порядка в общем случае имеют один общий автополярный треугольник, вершины которого представляют собой точки пересечения пар прямых, проходящих через общие точки кривых. В случае кривых $\varphi(x, y) = hz^2$, $\psi(x, y) = kz^2$ (x, y, z — однородные координаты точки), имеющих общий центр, две стороны их общего автополярного треугольника, проходящие через этот центр, являются линиями кривизны. Если одна из кривых (вторая) тангенциально вырождается в пару циклических точек $\psi(x, y) = x^2 + y^2 = 0$, $z = 0$, то линии кривизны становятся осями кривой $\varphi(x, y) = hz^2$. Н. И. Кованцов

4046. Геодезические линии развертывающейся винтовой поверхности или конуса вращения. До (Géodésiques d'un hélicoide développable ou d'un cône révolution. Deaux R.), Mathesis, 1954, **63**, № 9-10, 363—365 (франц.)

Как известно, линия, пересекающая все образующие произвольного цилиндра под постоянным углом (общая винтовая линия), является геодезической линией цилиндрической поверхности; отношение кривизны к кручению для нее постоянно; касательная образует постоянный угол с фиксированным направлением; главная нормаль к этому направлению перпендикулярна. Автор изучает линию l, главные нормали которой образуют постоянный угол $\varphi \neq \pi/2$ с фиксированным направлением d. Огибающая семейства ее спрямляющих плоскостей — конус вращения, ось которого имеет направление d, если характеристики проходят через неподвижную точку. В противном случае они будут касаться некоторой винтовой линии, и огибающая будет развертывающейся винтовой поверхностью.

Обратно, каждая геодезическая линия конуса враще-

ния или винтовой развертывающейся поверхности будет линией, главные нормали которой образуют постоянный угол с осью конуса или с характеристикой спрямляющих плоскостей винтовой линии — ребра возврата развертывающейся поверхности.

Если обозначить через ρ и τ радиусы кривизны и кручения, то для линии задачи имеет место соотношение $\rho = \tau\sqrt{(\operatorname{tg}^2\varphi)/(c + \int ds/d\tau)^2 - 1}$, где c — произвольное постоянное. Н. Н. Глаголева

4047. Равновесие и устойчивость натянутых сетей. Радон (Gleichgewicht und Stabilität gespannter Netze. Radon Johann), Arch. Math., 1954, 5, № 4-6, 309—316 (нем.)

На поверхности вращения можно ввести чебышевскую сеть, причем каждой зоне между двумя параллелями поверхности будет соответствовать параллелограмм в плоскости параметров u, v. Обратно, данный параллелограмм в плоскости u, v можно отобразить на зону различных поверхностей вращения. При заданных радиусах верхнего и нижнего края зоны ищется та поверхность, для которой расстояние между плоскостями верхнего и нижнего края зоны будет максимальным. Это соответствует отысканию положения устойчивого равновесия легкой сети, верхний край которой закреплен вдоль горизонтального кольца, а нижний — на соосном с ним тяжелом кольце, свободно стремящемся опуститься. Для получаемой вариационной задачи на относительный экстремум автором ранее рассматривались необходимые условия. В частности, было установлено, что при простых дополнительных предположениях искомая поверхность имеет постоянную отрицательную кривизну (Radon J., Mitt. math. Ges. Hamburg, 1940, 8, № 2, 147—151).

В настоящей работе автор исследует устойчивость равновесия получающейся натянутой сети. В зависимости от характеристик параллелограмма и величины радиусов экстремальная поверхность может иметь различный вид. Для сужающихся книзу поверхностей устанавливается устойчивость равновесия при жестком нижнем кольце и при замене его гибкой кольцевой нитью. В случае, когда поверхность сужаясь подходит к нижнему краю как к горловине, устойчивость имеет место также для груза, распределенного вдоль нижнего края. В случае жесткого кольца и расширяющейся книзу экстремальной поверхности устойчивость доказывается при дополнительных предположениях. В. А. Залгаллер

4048. Изометрия между двумя поверхностями Монжа. Петканчин (Изометрия между две повърхнини на Монж. Петканчин Боян), Изв. на Матем. ин-т Българ АН, 1954, 1, № 2, 155—170 (болг.; рез. русс., нем.)

Рассматриваются однопараметрические семейства изотропных прямых в трехмерном комплексном евклидовом пространстве и определяемые ими косые линейчатые поверхности (поверхности Монжа).

Опираясь на ранее опубликованную работу (Петканчин Б., Годиш. на Соф. универ., Прир.-мат. фак., 1947—1948, 44, № 1, 357—399), автор получает ряд нижеследующих условий, при которых изометрия вырождается в конгруэнтность: 1) изометричные поверхности $\Gamma, \overline{\Gamma}$ с $\overline{\mathrm{T}}(\sigma) = \mathrm{T}(\sigma)$ конгруэнтны; 2) центральные кривые на изометричных поверхностях тогда и только тогда соответствуют друг другу, когда изометрия вырождается в конгруэнтность; 3) изометрия между двумя монжевыми поверхностями 1-го рода есть конгруэнтность (Berwald L., Sitzungsber. math.-phys. Kl. Akad. wiss., München, 1913, 143—211); 4) если у изометричных монжевых поверхностей соответствующие образующие параллельны, то они получаются одна из другой с помощью трансляции или центральной симметрии, следовательно, конгруэнтны. П. М. Олоничев

4049. О сетях линий уровня скалярных полей. Катков Г. Ф., Тр. Воронежск. ун-та, 1954, 33, 57—61

Выводится дифференциальное уравнение сети, составленной (на поверхности) из линий уровня двух скалярных функций. Н. В. Ефимов

4050. О гониометрической геометрии семейств кругов. Стока (Asupra geometriei gonometrice a familiilor de cercuri. Stoka Marius I.), Studii şi cercetări mat., 1954, 5, № 3-4, 403—412 (рум.; рез. русс., франц.)

Рассматривается трехмерное евклидово пространство E_3, отнесенное к прямоугольной системе координат $x = x_1/x_4$, $y = x_2/x_4$, $z = x_3/x_4$. Сфера $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_4^2 = 0$ называется основной, а плоскость $z = 0$ — экваториальной плоскостью. Путем стереографического проектирования из полюса $S(0, 0, -1, 1)$ основной сферы на экваториальную плоскость устанавливается взаимно однозначное соответствие между точками E_3 и кругами K экваториальной плоскости. Заданной в E_3 поверхности

$$x = f(u, v),\ y = \varphi(u, v),\ z = \psi(u, v) \qquad (1)$$

соответствует в экваториальной плоскости конгруэнция кругов $\mathfrak{K}_2$. Пользуясь формулой, полученной Каганом для угла $d\theta$ двух бесконечно близких кругов такой конгруэнции, автор, ограничиваясь бесконечно малыми второго порядка, получает формулу

$$d\theta^2 = (ds^2 - dS^2)/S^2 = d\omega^2/S^2,$$

где ds^2 — линейный элемент поверхности, а S задается соотношением

$$f^2(u, v) + \varphi^2(u, v) + \psi^2(u, v) - 1 = S^2.$$

Доказано, что $d\omega^2$ является конформным инвариантом преобразований рассматриваемой в работе четырехпараметрической подгруппы проективной группы

$$d\bar{\omega}^2 = (\bar{s}/s)^2\, d\omega^2. \qquad (2)$$

Однопараметрическое семейство кругов («конгруэнция» кругов $\mathfrak{K}_1$) соответствует кривой линии пространства E_3. Не существует ни одной конгруэнции $\mathfrak{K}_2$, все круги которой были бы касательными между собой, но каждый круг такой конгруэнции принадлежит двум конгруэнциям $\mathfrak{K}_1$ из конгруэнции $\mathfrak{K}_2$, круги которых касаются друг друга. Конгруэнции $\mathfrak{K}_1$ могут быть действительными различными или совпадающими либо мнимыми.

Если система

$$\begin{cases} f_u^2 + \varphi_u^2 + \psi_u^2 = E, & ff_u + \varphi\varphi_u + \psi\psi_u = SS_u \\ f_u f_v + \varphi_u\varphi_v + \psi_u\psi_v = F, & ff_v + \varphi\varphi_v + \psi\psi_v = SS_v \\ f_v^2 + \varphi_v^2 + \psi_v^2 = G, & f^2 + \varphi^2 + \psi^2 = S^2 + 1 \end{cases}$$

имеет решение, то поверхность (1) определяется заданием форм ds^2 и $d\theta^2$. Наконец, формула (2) дает возможность определять угол между двумя кругами конгруэнции $\mathfrak{K}_2$ вдоль конгруэнции $\mathfrak{K}_1$. Конгруэнция $\mathfrak{K}_1$, вдоль которой этот угол наименьший, названа геодезической. Доказано, что геодезические конгруэнции конгруэнций $\mathfrak{K}_2$, соответствующих сферам с центром в начале координат, соответствуют геодезическим кривым этих сфер. Н. М. Остиану

4051. Фокальные поверхности конгруэнций сфер. Ванчура (Plástě kongruence koulí. Vančura Zdeněk), Časop. pěstov. mat., 1955, 80, № 3, 317—327 (чеш.; рез. русс., франц.)

Рассматриваются конгруэнции сфер в смысле геометрии сфер Ли $p = p(u^{\mathrm{I}}, u^{\mathrm{II}})$, где p — совокупности гексасферических координат, связанных квадратичным соотношением $p \cdot p = 0$. Полагая $u^a = u^a(t)$, $a = \mathrm{I}, \mathrm{II}$, получим каналовую поверхность конгруэнции. Совокупности поверхностных элементов сферы $p(t_0)$, являющихся в то же время поверхностными элементами сфер r, для которых $v(t_0) \cdot r = 0$, где $v = (\partial p/\partial u^a)(du^a/dt)$, называются элементарными поверхностями. В случае, когда $a_{\mathrm{I\,I}} a_{\mathrm{II\,II}} - a^2_{\mathrm{I\,II}} > 0$, где $a_{ab} = (\partial p/\partial u^a)(\partial p/\partial u^b)$, элементарные поверхности, лежащие на сфере p конгруэнции, имеют два общих поверхностных элемента. Точки и плоскости этих поверхностных элементов называются соответственно фокусами F_k ($k = 1,2$) и фокальными плоскостями f_k конгруэнции. Геометрическое место фокусов F_k конгруэнции сфер называется k-й фокальной поверхностью конгруэнции. Находятся уравнения фокальных поверхностей и показывается, что если k-я фокальная поверхность не вырождается в линию, она касается фокальной плоскости f_k в фокусе F_k. František Vyčichlo

4052. О конгруэнции линий 2-го порядка в трехмерном проективном пространстве. Туганов Н. Г., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 1, 207

Резюме доклада, в котором излагалась работа автора, опубликованная под тем же заглавием (РЖМат, 1956, 1625). Р. Н. Щербаков

4053 Д. Изучение некоторых двумерных метрических геометрий с абсолютом, являющимся кривой второй или третьей степени. Скородумов В. М., Автореф. дисс. канд. физ.-матем. н., Ростовск.-н/Д ун-т, Ростов-на-Дону, 1955

ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

4054. Термодинамика континуума римановых областей и теорема о числе измерений ($d \leqslant 3$) пространства. Штюккельберг (Thermodynamique dans un continu, riemannien par domaines, et théorème sur le nombre de dimensions ($d \leqslant 3$) de l'espace. Stueckelberg E. C. G.), Helv. phys. acta, 1953, **26**, № 3-4, 417—420 (франц.)

См. РЖФиз, 1955, 6196.

4055. О структуре многообразия чувств и порогов раздражения. Реэнпяа (Über die Struktur der Sinnesmannigfaltigkeit und der Reizbegriffe. Reenpää Yrjö), Sitzungsber. Heidelberg. Akad. Wiss. Math.-naturwiss. Kl., 1953, 1. Abhandlung, 3—28 (нем.)

Автор пытается развить риманову геометрию многообразия чувств с интенсивностью, качеством, локализацией и временем в качестве ортогональных осей и с единицами измерения, определяемыми порогами раздражения. Философское или научное значение работы рецензенту неясно. В работе отсутствует попытка рассмотреть интересные для науки вопросы определения независимых измерений качества.

A. S. Householder

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 3, 243.

4056. О доказательстве Кодаира — Спенсера теоремы Лефшеца. Акидзуки, Накано (Note on Kodaira — Spencer's proof of Lefschetz theorems. Akizuki Yasuo, Nakano Shigeo), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 4, 266—272 (англ.)

Изложено упрощенное (не использующее дифференциально-геометрических соображений) доказательство некоторых результатов Кодаира и Спенсера (РЖМат, 1954, 3274). М. М. Постников

4057. Необходимая унитарная теория поля как неголономная параболическая геометрия Ли, реализуемая в трехмерном пространстве Декарта. II. Такасу (A necessary unitary field theory as a non-holonomic. Parabolic Lie geometry realized in the three-dimensional. Cartesian space. II. Takasu Tsurusaburo), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 8, 702—708 (англ.)

Продолжение 1-й части статьи автора под тем же названием (РЖМат, 1955, 2866). Рассматриваются те же уравнения общей теории относительности для случая отдельной части пространства. Р. М. Гейдельман

4058. Приложения тензорного исчисления к нескольким задачам римановой геометрии. Георгиев (Aplicaţii ale calculului tensorial la câteva probleme ale geometriei riemanniene. Gheorghiev Gh.), Gaz. mat. şi. fiz., 1955, **A7**, № 6, 245—262 (рум.)

Популярное изложение основ римановой геометрии и дифференциальной геометрии гиперповерхности в n-мерном евклидовом пространстве в тензорном исчислении. Б. А. Розенфельд

4059. О некоторых свойствах траекторий в групповых пространствах. Хориэ (On some properties of trajectories of the group-spaces. Horie Nobuo), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto., 1954, **A28**, № 2, 169—178 (англ.)

Рассматривается группа Ли G_r. Какая-нибудь ее одномерная подгруппа G_1 подвергается действию правого сдвига $a \to ab_0$ (a — произвольный, b_0 — фиксированный элементы G_r) и переходит в некоторую траекторию $C^{(+)}_{b_0}$; аналогично для левого сдвига $a \to b_0 a$ получаем некоторую траекторию $C^{(-)}_{b_0}$. Обе траектории проходят через b_0. Исследуется вопрос, при каких условиях $C^{(+)}_{b_0}$ и $C^{(-)}_{b_0}$ совпадают, в частности когда они совпадают своими соответствующими точками. Результаты автора почти тривиальны. Отметим лишь наиболее интересный.

Теорема 5. Если G_1 замкнута и $C^{(+)}_{b_0}$, $C^{(-)}_{b_0}$ совпадают при любом b_0, то они совпадают своими соответствующими точками. П. К. Рашевский

4060. О группах голономии групповых пространств. Хориэ (On the holonomy groups of the group-spaces. Horie Nobuo), Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto, 1954, **A28**, № 2, 161—167 (англ.)

Пространство группы Ли G_r снабжено 1-й и 2-й связностью по Картану (обе связности без кривизны, но, вообще говоря, с кручением). Для этих связностей рассматриваются группы голономии (неоднородные, т. е. учитываются сдвиги). Выводится ряд тривиальных результатов: группы голономии состоят из сдвигов, размерности этих групп равны размерности коммутанта G'_r и т. п. П. К. Рашевский

4061. Некоторые замечания о сравнении двух аффинных связностей. Коссу (Alcune osservazioni sul confronto di due connessioni affini. Cossu Aldo), Rend. mat. e applic., 1954, **13**, № 2, 189—198 (итал.)

Пусть векторы ξ^i и $\bar{\xi}^i$, приложенные в точке $\overset{0}{x}{}^i$ в X_n, соответствуют одному и тому же вектору ξ'^i (приложенному в точке $x^i + dx^i$) относительно двух аффинных связностей $\overset{0}{L}{}^i_{hk}(x)$ и $\bar{L}^i_{hk}(x)$, заданных в X_n. Тогда с точностью до бесконечно малых высшего порядка

$$\bar{\xi}^i = (\delta^i_k + \psi^i_{hk}\, dx^h)\, \xi^k, \qquad (1)$$

где $\psi^i_{hk} = \bar{L}^i_{hk}(x) - \overset{0}{L}{}^i_{hk}(x)$.

Подробно изучается бесконечно малое центроаффинное преобразование (1), порождаемое двумя связностями L^i_{hk} и $\bar{L}^i_{hk}$; это преобразование зависит от смещения dx^h. В частности, разыскиваются те направления и векторы, для которых обе связности определяют одинаковый закон параллельного перенесения направлений или векторов. Последняя задача равносильна задаче о собственных направлениях преобразования (1).

Л. Л. Вербицкий

4062. О группах голономии линейных связностей. II. Свойства общих линейных связностей. Нейенхейс (On the holonomy groups of linear connections. II. Properties of general linear connections. Nijenhuis Albert), Proc. Koninkl. nederl. akad. wetensch., 1954, **57**, A, № 1, 17—25; Indagationes math., 1954, **16**, № 1, 17—25 (англ.)

Результаты первой части этой работы (РЖМат, 1954, 1804) обобщаются в двух направлениях.

1) Рассматривается многообразие M_n класса C^k, снабженное в каждой точке x N-мерным векторным пространством F_x. Предполагается, что задано семейство открытых множеств $U \subset M$ вместе с криволинейными координатными системами на них; множества U покрывают M. Всякому $x \in U$ ставится в соответствие в F_x определенный векторный базис (все зависимости предполагаются достаточно гладкими).

В результате возникает косое произведение $B = \bigcup_{x \in M} F_x$ (fibre bundle), слоем которого является N-мерное векторное пространство F_x. Далее вводится параллельное перенесение векторов u^A из слоя F_x в бесконечно близкий слой $F_{x'}$ при помощи величин $\Gamma^A_{\mu B}$ по формуле, сходной с обычной (индексы A, B относятся к базису в F_x):

$$du^A = -\Gamma^A_{\mu B}\, dx^\mu u^B.$$

В частном случае, когда за F_x принимается касательное пространство в точке x, величины $\Gamma^A_{\mu B}$ принимают вид $\Gamma^\alpha_{\mu\beta}$ и мы возвращаемся к пространству аффинной связности. Построения, проведенные для этого пространства в первой части работы, без принципиальных изменений переносятся на описанную более общую конструкцию.

2) Рассматривается пространство аффинной связности M, причем параллельное перенесение векторов хорошо известным способом (Картан) дополняется сдвигом касательного пространства, так что бесконечно близкие касательные пространства связаны неоднородными аффинными преобразованиями. Группа голономии $H(M, p)$ (которая строится аналогично $h(M, p)$) есть группа неоднородных аффинных преобразований в касательном пространстве $E(p)$. Вводятся $H^0(M, p)$, $H^*(p)$, $H'(p)$ совершенно аналогично $h^0(M, p)$, $h(p)$, $h'(p)$. Доказываются теоремы:

Если рассматриваемая связность класса C^∞ и притом без кручения, и пространство M полное в смысле Эресманна, и если группа $H'(x)$ нетривиальна для всех точек $x \in M$, то для всякой точки $\eta \in E(x)$ существует нетривиальная подгруппа группы $H^0(M, x)$, которая оставляет η инвариантной (полнота пространства M в смысле Эресманна означает, что любой гладкий путь в касательном пространстве $E(x)$, исходящий из точки x, может быть полностью развернут в пространство M).

Если M — полное риманово пространство с положительно определенной метрикой и если $H^0(M, p)$ оставляет инвариантной точно одну точку, то M гомеоморфно евклидову пространству.

Если $H^0(M, p)$ для какого-нибудь пространства аффинной связности M содержит однопараметрическую подгруппу сдвигов, то или $H^0(M, p)$ содержит все сдвиги, или $h^0(M, p)$ приводима. П. К. Рашевский

4063. О минимальных поверхностях в расслоенных финслеровых пространствах. Бартель (Über die Minimalflächen in gefaserten Finslerräumen. Barthel Woldemar), Ann. mat. pura ed appl., 1954, **36**, 159—190 (нем.)

Рассматривается n-мерное финслерово пространство как n-мерное действительное пространство $(x^1, \ldots, x^n)$, в котором длина кривой $x^i = x^i(t)$ определена интегралом $s = \int L(x^i, \dot{x}^i)\, dt$, где $L(x^i, \dot{x}^i) > 0$; $\rho L(x, \dot{x}) = L(x, \rho\dot{x})$. Вводится евклидова связность с метрическим тензором $g_{ij} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^j}$ и абсолютным дифференциалом вектора $Dv^i = dv^i + v^k(\Gamma^i_{kh}dx^h + C^i_{kh}d\dot{x}^h)$. Постулируя ряд свойств этого дифференциала, автор получает $Dg_{ij} = 0$; $C_{ikh} = \frac{1}{4}\frac{\partial^3 L^2}{\partial \dot{x}^i \partial \dot{x}^k \partial \dot{x}^h}$, а также систему уравнений для определения Γ^i_{kh}. Введенная связность такова, что прямые (автопараллельные кривые) оказываются геодезическими.

Для гиперповерхности $x^i = x^i(u^1, \ldots, u^{n-1}) \equiv x^i(u^\rho)$ вводится ряд понятий: нормальный вектор $\dot{x}^i$, определенный уравнениями $g_{ik}(x, \dot{x})\dot{x}^i(\partial x^k / \partial u^\rho) = 0$; линейный элемент гиперповерхности

$$ds^2 = g_{ij}(\partial x^i / \partial u^\rho)(\partial x^j / \partial u^\sigma)\, du^\rho\, du^\sigma = g_{\rho\sigma}\, du^\rho\, du^\sigma;$$

площадь области гиперповерхности

$$f = \int L(x, \dot{x})\, du^1 \ldots du^{n-1};$$

вторая квадратичная форма гиперповерхности $l_i D\dot{x}^i = -\omega_i dx^i = a_{\rho\sigma}du^\rho du^\sigma$, где $l_i = \partial L/\partial \dot{x}^i$; $\omega_i = dl^i + \Gamma^i_{kh}l^k dx^h$, $l^i = \dot{x}^i/L$; нормальная кривизна гиперповерхности в направлении du^σ

$$\mathfrak{K} = a_{\rho\sigma}du^\rho du^\sigma / g_{\rho\sigma}du^\rho du^\sigma.$$

Находятся деривационные уравнения для гиперповерхности, а также обычным путем строится внутренняя геометрия, индуцированная объемлющим пространством. Минимальная гиперповерхность определяется обращением в нуль первой вариации интеграла, выражающего площадь. Дифференциальное уравнение таких гиперповерхностей имеет вид:

$$M \equiv \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial u^\tau} g_{ik} g^{\rho\tau}\left(g^{k\sigma} + A^k A^\sigma + g^{\sigma j}\frac{dA^k}{d\dot{x}^j}L\right)a_{\rho\sigma} = 0,$$

где $A^k = \frac{L}{2}g^{ki}\partial \ln g/\partial \dot{x}^i$, $g = |g_{ij}|$. Гиперповерхности, для которых $a_{\rho\sigma} = 0$, минимальные. В конце работы вычисляется вторая вариация интеграла, выражающего площадь. Г. Ф. Лаптев

4064. О понятии геометрического объекта. Хаантьес (On the notion of geometric object. Haantjes J.), Convegno internazionale di geometria differenziale, Italia, 1953, Roma, Ed. Cremonese, 1954, 77—81 (англ.)

Автор имеет целью дать такое построение теории геометрического объекта, в котором пространство объекта и группа его преобразований являлись бы исходными понятиями. Задача решается при помощи

теории расслоенных пространств. Вводится группа L_n^s элементом которой является совокупность n полиномов степени s от n переменных, а групповая композиция определяется посредством подстановки полиномов одного элемента в полиномы другого с отбрасыванием членов, степени которых больше s. Далее рассматривается топологическое пространство Y с действующей в нем группой G и n-мерное топологическое пространство X_n, покрытое окрестностями. Для каждой окрестности V_j вводится гомеоморфизм ψ_j, отображающий некоторое открытое подмножество E_j n-мерного евклидова пространства E на V_j. Тогда $\psi_j^{-1}\psi_i$ отображает $\psi_i^{-1}(V_i \cap V_j)$ на $\psi_j^{-1}(V_i \cap V_j)$. Предполагается, что это отображение r раз непрерывно дифференцируемо, вследствие чего X_n становится дифференцируемым многообразием класса r. Значения s первых производных от $\psi_j^{-1}(x)\psi_i(x)$, где $x \in V_i \cap V_j$, вычисленные в точке $\psi_i^{-1}(x)$, образуют элемент $A_{ji}(x)$ группы $L_n^s (s \leqslant r)$, причем имеют место соотношения $A_{kj}(x)A_{ji}(x) = A_{ki}(x)$. Если $h(x)A_{ji}(x) \equiv g_{ji}(x) \in G$, где $h(x)$ — некоторый гомоморфизм $L_n^s \simeq G$, то функции $g_{ji}(x)$ осуществляют отображение $V_i \cap V_j \to G$ и удовлетворяют соотношениям $g_{kj}(x)g_{ji}(x) = g_{ki}(x)$. Отсюда по известной теореме теории расслоенных пространств следует, что существует единственный расслоенный пучок (или, что то же, косое произведение), для которого X_n является базисным пространством, Y — слоем и G — группой. Этот пучок называется пучком геометрических объектов класса s и типа $h(x)$ и обобщает известное в теории расслоенных пространств понятие тензорного пучка.

В качестве приложения автор дает классификацию пучков одномерных (т. е. с одномерным слоем Y) геометрических объектов 1-го класса и постоянного типа.

П. И. Швейкин

4065. Об экстензорах дробного порядка. Сасаяма (On extensors of fractional grade. Sasayama Hiroyoshi), Tensor (N. S.), 1954, **3**, 101—107 (япон.)

В недавней статье (РЖМат, 1955, 952) автор предложил идею пространства линейных элементов нецелого порядка и изучал получающиеся при этом экстензоры. В настоящей работе изучается пространство, состоящее из линейных элементов нецелого порядка, а также бесконечного порядка. Показывается, что ковариантный эксвектор нецелого порядка (бесконечного порядка) и контравариантный эксвектор бесконечного порядка (нецелого порядка) двойственны друг другу. Кроме того, автор показывает, как образовать ковариантные и контравариантные эксвекторы дробного порядка из обычных векторов. Последний результат обобщается на тензоры произвольного порядка. (По мнению референта, определение линейных элементов бесконечного порядка должно быть сделано более ясным).

N. Coburn

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 10, 900

4066. Общее решение уравнений Эйнштейна $g^{\mu\nu}_{+-};_{\rho} = 0$. **Мавридес** (La solution générale des équations d'Einstein $g^{\mu\nu}_{+-};_{\rho} = 0$. Mavridés, Stamatia), C. r. Acad. sci., 1955, **241**, № 2, 173—174 (франц.)

Для уравнения

$$g_{\substack{\mu\nu \\ +-}};_{\rho} = 0 \qquad (1)$$

единой теории поля Эйнштейна было недавно найдено Тонла общее решение (Tonnelat M.-A., J. Phys. Rad., 1951, **12**, 81; РЖМат, 1955, 5284), т. е. получено выражение аффинной связности $\Gamma^{\rho}_{\mu\nu}$ через фундаментальный тензор $g_{\mu\nu}$. В этом решении использована метрика, совпадающая с точностью до инварианта с симметрической частью $\gamma_{\mu\nu}$ тензора $g_{\mu\nu}$. Автор, учитывая соображения Лихнеровича (Lichnerowicz A., Les théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme, Masson, 1955), отыскивает выражение аффинной связности через симметрическую $h^{\mu\nu}$ и антисимметрическую $f^{\mu\nu}$ части тензора $g^{\mu\nu}$

$$g^{\mu\nu} = h^{\mu\nu} + f^{\mu\nu}, \qquad (2)$$

опираясь на метрику $h_{\mu\nu}$ ($h_{\mu\nu}$ — тензор, взаимный $h^{\mu\nu}$). Хотя к этому выражению можно придти, опираясь на решение Тонла и учитывая связи между симметрическими и антисимметрическими частями тензоров $g_{\mu\nu}$ и $g^{\mu\nu}$, но, как отмечает автор, проще решить вопрос заново, отправляясь от уравнений

$$g^{\mu\nu}_{+-};_{\rho} = 0 \qquad (3)$$

и пользуясь методом, аналогичным методу Тонла.

Приведен окончательный результат вычислений, причем отмечено наличие существенных различий в выводах решений (3) и (1). Условие существования решения прежнее.

Б. Л. Лаптев

4067. К соотношению между фундаментальным тензором и аффинной связностью в единой теории поля. Бертотти (On the ralation between fundamental tensor and affinity in unified field theory. Bertotti B.), Nuovo cimento, 1954, **11**, № 4, 358—365 (англ.; рез. итал.)

См. РЖФиз, 1955, 8395.

4068. Проблема многих тел и суперпозиция сферически симметричных пространств — времен в общей теории относительности. Такено (The problem of many bodies and the superposition of spherically symmetric space-times in general relativity. Takeno), Progr. Theoret. Phys., 1954, **11**, № 4—5, 392—410 (англ.)

См. РЖФиз, 1956, 9515.

4069. О шестимерных единых теориях поля. Яно, Огане (On six-dimensional unified field theories. Yano Kentaro, Ohgane Masayoshi), Rend. mat. e applic., 1954, **13**, № 1-2, 99—132 (англ.)

Учитывая появившиеся в последние годы различные варианты единой теории поля, основанные на привлечении многообразий 5 или 6 измерений, авторы строят геометрию риманова пространства V_{n+2}, обладающую свойствами, необходимыми в этих теориях; в качестве основного инструмента используются неголономные системы координат и производные Ли. V_{n+2} определяется формой $d\sigma^2 = G_{\mu\nu}(x)\,dx^{\mu}\,dx^{\nu}$ ($\mu, \nu = 0, 1, \ldots, n, \infty$) с сигнатурой $+++\,+--$ и допускает дву-параметрическую группу преобразований g контравариантных векторов ξ_0^{λ}, ξ_{∞}^{λ}: $\xi^{\lambda} = \alpha_0^0 E_0^{\lambda} + \alpha_0^{\infty} E_{\infty}^{\lambda}$, $\xi_{\infty}^{\lambda} = \alpha_{\infty}^0 E^{\lambda} + \alpha_{\infty}^{\infty} E_{\infty}^{\lambda}$, $\begin{vmatrix} \alpha_0^0 & \alpha_0^{\infty} \\ \alpha_{\infty}^0 & \alpha_{\infty}^{\infty} \end{vmatrix} \neq 0$, где векторы E_0^{λ} и E_{∞}^{λ} ортогональны и имеют нормы 1 и -1 соответственно. На основании второй теоремы Ли производные Ли от вектора ξ_0^{λ} относительно ξ_{∞}^{λ} и наоборот будут иметь вид: $x_0 \xi_{\infty}^{\lambda} = \xi_0^{\sigma}\xi_{\infty,\,\sigma}^{\lambda} - \xi_{\infty}^{\sigma}\xi_{0,\,\sigma}^{\lambda}$, $x_{\infty}\xi_0^{\lambda} = \xi_{\infty}^{\sigma}\xi_{0,\,\sigma}^{\lambda} - \xi_0^{\sigma}\xi_{\infty,\,\sigma}^{\lambda}$, где запятой обозначаются частные производные по x^{σ}.

Принимая $n+2$ ковариантных векторов E^{α}_{λ} за координатные, можно определить неголономную систему координат, относительно которой $G_{\mu\nu}E^{\mu}_{\beta}E^{\nu}_{\gamma}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&g_{ik}&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $g_{ik}=G_{\mu\nu}E^{\mu}_{j}E^{\nu}_{k}$, что позволяет записать основные тензорные операции для этой системы координат.

Для неголономного подпространства V^{n}_{n+2}, определяемого уравнениями $du^0\equiv E^0_{\lambda}dx^{\lambda}=0$, $du^{\infty}\equiv E^{\infty}_{\lambda}dx^{\lambda}=0$, метрика определяется формой $ds^2=g_{ik}(x)\,du^i\,du^k$, любой вектор имеет компоненты $(0, v^i, 0)$, а ковариантное дифференцирование определится формулами

$$E^{\lambda}_{i}\delta v^{i}=E^{\lambda}_{i}v^{i}\,|_{k}du^{k},\ v^{i}\,|_{k}=v^{i}_{,k}+\Gamma^{i}_{jk}v^{j}.$$

Это позволяет записать уравнения Гаусса и Вейнгартена, а также выражения тензора кривизны и тензора Риччи. Сопоставляя g бесконечно малые преобразования $\overset{*}{x}{}^{\lambda}=x^{\lambda}+\xi^{\lambda}_{0}dt^0$, $\overset{*}{x}{}^{\lambda}=x^{\lambda}+\xi^{\lambda}_{\infty}dt^{\infty}$, можно записать свойства, инвариантные при этих преобразованиях. Например, необходимое и достаточное условие того, чтобы $C_{\mu\nu}$ определял метрический тензор g_{jk} в v_n, имеет вид: $E^{\mu}_{j}E^{\nu}_{k}(X_PC_{\mu\nu})=0$ $(P=0,\infty)$.

В шестимерной единой теории поля тензор g_{jk} отождествляется с гравитационными потенциалами, $\Omega^0_{jk}\equiv E^{\mu}_{j}E^{\nu}_{k}(E^0_{\mu,\nu}-E^0_{\nu,n})=\varphi_{j,n}$ с тензором электромагнитного поля, $\Omega^{\infty}_{jk}=-\psi_{jk}$ представляет некоторое новое поле, причем φ_{jk} и ψ_{jk} будут тензорами v_n тогда и только тогда, если $X_Q\Omega^P_{jk}=0$ $(P, Q=0,\infty)$.

Используя идею Синга (Synge J. L., Math. Ann., 1928, **99**, 738—750), авторы развивают теорию неголономных геодезических линий и записывают неголономные составляющие тензора кривизны и тензора Риччи.

Уравнения единой теории поля получаются из вариационного принципа: $\delta\int K\sqrt{\mathfrak{G}}\,dx^0\,dx^1\ldots dx^n\,dx^{\infty}=0$, где K — скалярная кривизна v_{n+2}, и имеют вид: $K_{\mu\nu}-\frac{1}{2}K\mathfrak{G}_{\mu\nu}=\varkappa_{PQ}E^{P}_{\mu}E^{Q}_{\nu}$.

При $n=4$ в разработанную схему, с некоторыми дополнительными ограничениями, укладываются многие из имеющихся вариантов теории поля. Теории Калуца—Клейна, Эйнштейна—Майера и неголономная единая теория поля требуют предположения, что коммутатор группы определяет трансляцию. Теория Эйнштейна — Бергмана требует, чтобы $\xi^{\lambda}_{0}=E^{\lambda}_{0}$, $\xi^{\lambda}_{\infty}=E^{\lambda}_{\infty}$, $X_QE^{P}_{\lambda}=0$. Вариант Жордана — Бергмана требует, чтобы $\overline{\xi}^{\lambda}_{P}=\rho_PE^{\lambda}_{0}$, $X_P\rho Q=0$, $X_QG_{\mu\nu}=0$, $\rho_P=\mathrm{const}$ $(P, Q=0,\infty)$. Наконец, в теории Гофмана, объединяющей гравитационные, электромагнитные и мезонные поля, предполагается, что $\rho_P\neq\mathrm{const}$, $\rho_0/\rho_{\infty}=\mathrm{const}$, $X_0C_{\mu\nu}=2NC_{\mu\nu}$; $X_{\infty}G_{\mu\nu}=0$. А. З. Петров

МЕТРИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В ГЕОМЕТРИИ

4070. Разностные системы в конечной группе. Брук (Difference sets in a finite group. Bruck R. H.), Trans. Amer. Math. Soc., 1955, **78**, № 2, 464—481 (англ.)

Система из v точек, и v прямых связанных соотношением инцидентности, называется (v, k, λ)-системой П (v, k, λ — натуральные числа, $v>k>\lambda>0$), если каждая прямая содержит в точности k различных точек, а любые две различные прямые содержат λ различных общих точек. При естественном определении коллинеации система П называется транзитивной, если существует подгруппа G группы коллинеаций такая, что для любой пары точек P, $Q\in\Pi$ существует в точности одна коллинеация x, для которой $Px=Q$. Транзитивную систему П можно получить из разностной системы (р. с.) (G, D), состоящей из группы G порядка v и подмножества D, содержащего k элементов таких, что выполнено одно из следующих эквивалентных условий (I) и (II): если $x\in G$, $x\neq 1$, то существует в точности λ различных упорядоченных пар (d_1, d_2) элементов из D таких, что (I) $x=d_1^{-1}d_2$; (II) $x=d_1d_2^{-1}$. Р. с. называется абелевой, соответственно, циклической, если такой является группа G. Многие авторы (библиография приводится) изучали циклические р. с. Бо́льшая часть этих результатов переносится на абелевы р. с. Изучаются также неабелевы транзитивные проективные плоскости, т. е. системы с $\lambda=1$. Наконец, исследуются правые мультипликаторы р. с. (G, D), т. е. такие автоморфизмы θ группы G, что $D\theta=Da$ для некоторого $a\in G$ (РЖМат, 1953, 1114; 1954, 2037). Л. А. Скорняков

4071. Линейные конгруэнции в пространствах над алгебрами альтернионов. Джавадов М. А., Аббасов Н. Т., Алиева Ф. М., Докл. АН АзССР, 1955, **11**, № 2, 75—78 (рез. азерб.)

Изучаются конгруэнции прямых в проективных пространствах $P_n(A_m)$ и неевклидовых пространствах $K_n(A_m)$, построенных над алгебрами A_m альтернионов (чисел Клиффорда), введенных Джавадовым, Исмаиловым и Касимовой (Докл. АН АзССР, 1955, **11**, № 1). Линейные конгруэнции пространств $P_n(A_m)$ состоят из прямых, инвариантных при инволюционных коллинеациях определенного вида, а паратактические конгруэнции пространств $K_n(A_m)$ состоят из прямых, инвариантных при инволюционных движениях определенного вида. Показывается, что линейная конгруэнция в $P_{2n+1}(A_m)$ является моделью пространства $P_n(A_{m+1})$, а паратактическая конгруэнция в $K_{2n+1}(A_m)$ является моделью пространства $K_n(A_{m+1})$, причем группа коллинеаций $P_n(A_{m+1})$ и группа движений $K_n(A_{m+1})$ соответственно изоморфны фактор-группам подгрупп группы коллинеаций $P_{2n+1}(A_m)$ и группы движений $K_{2n+1}(A_m)$, переводящим в себя конгруэнцию, по подгруппам, переводящим в себя каждую прямую конгруэнции. Работа обобщает результаты А. П. Нордена и референта для $m=1,2$ (A_1 — поле вещественных чисел, A_2 — поле комплексных чисел, A_3 — тело кватернионов). Б. А. Розенфельд

4072. Каноническая форма матриц инцидентности конечных проективных плоскостей и ассоциированные с ними латинские клетки. Пейдж, Уэкслер (A canonical form for incidence matrices of finite projective planes and their associated latin squares. Paige Lowell J., Wexler Charles), Portugaliae math., 1953, **12**, 105—112 (англ.)

Матрицу инцидентности проективной плоскости, состоящей из n^2+n+1 точек, можно нормализовать, разбивая ее на блоки. Строки каждого из таких блоков представляют прямые, проходящие через одну точку, а столбцы — точки, лежащие на одной прямой. Верхние и первые слева блоки можно выписать полностью, а любой другой блок представляет собой перестановочную $n\times n$-матрицу. Такая нормальная форма матрицы инцидентности непосредственно связана с тем хорошо известным фактом, что полное множество, состоящее из $n-1$ по

парно ортогональных латинских (latin) $n \times n$-клеток, определяет плоскость. Marshall Hall, Jr.

Перевод из Math. Revs, 1954, **15**, № 8, 611.

4073. Системы кривых на плоскости. Скорняков Л. А., Успехи матем. наук, 1955, **10**, № 2, 205—206

Продолжение работы автора (РЖМат, 1955, 4692). Формулируется теорема: Пусть на проективной плоскости П задана система Σ множеств, гомеоморфных окружности; через две точки из П проходит точно одно множество из Σ; два множества из Σ имеют в точности одну общую точку. Тогда естественная топология П допускает такую метрику, что множества из Σ являются геодезическими. В. А. Ефремович

4074. Измерение объемов в R_3 постоянной кривизны. Майер (Inhaltsmessung im R_3 fester Krümmung. Maier W.), Arch. Math., 1954, **5**, № 4-6, 266—273 (нем.)

Работа посвящена вопросу об измерении объемов тетраэдров специального вида эллиптического и гиперболического пространств, имеющих три прямых плоских угла и три прямых двугранных угла. К решению этого вопроса можно свести общую задачу измерения объема многогранников в соответствующем пространстве. Объемы этих тетраэдров выражаются с помощью довольно сложных трансцендентных функций. И. М. Яглом

4075. Об аксиоматическом обосновании внутренней геометрии поверхности. Ринов (Über eine axiomatische Begründung der inneren Geometrie der Flächen. Rinow W.), Acta math. Acad. sci. hung., 1954, **5**, Suppl., 145—152 (нем.; рез. русс.)

Проективной поверхностью автор называет поверхность, на которой геодезические определяются как система кривых, удовлетворяющих уравнениям

$$\ddot{u}^i - F^i(u^1, u^2; \dot{u}^1, \dot{u}^2) = 0, \quad i = 1, 2, \qquad (1)$$

где F^i имеют непрерывные частные производные первого порядка и однородны относительно $\dot{u}^1, \dot{u}^2$ в степени 2. У каждой точки проективной поверхности существует просто выпуклая окрестность, т. е. такая окрестность, у которой любые две точки можно соединить дугой единственной геодезической, целиком расположенной в этой окрестности.

Автор делает попытку построения аксиоматики просто выпуклых проективных поверхностей. Аксиомы сочетания, порядка и непрерывности такие же, как и для проективной плоскости. Если потребовать осуществления теоремы Дезарга, придем к проективной плоскости. Вместо этого автор требует осуществления предложения об инфинитезимальном четырехугольнике. Пусть на проективной поверхности четыре точки A, B, C, D пробегают четыре последовательности, сходящиеся к точке 0. При этом пусть прямые AB, BC, CD, DA, AC стремятся к прямым a, b, c, d, e, из которых никакие три не совпадают, кроме того, не должно быть одновременно $a = b$, $c = d$ или $a = d$ и $c = b$. Тогда BD стремится к прямой f. Можно доказать, что f определяется через a, b, c, d, e однозначно и независимо от способа предельного перехода. Если зафиксировать a, b, c, d, то каждой прямой e соответствует прямая f. Это соответствие инволюционно. Введение инволюции позволяет ввести в пучке двойное отношение, образующее тело, изоморфное телу вещественных чисел. Пусть A, B, C — три произвольные точки поверхности, играющие роль фундаментальных точек; E — внутренняя точка треугольника, так называемая единичная точка. Если P — произвольная точка поверхности, то $D(AP, AE, AB, AC) = u$ и $D(BP, BE, BC, BA) = v$ и u, v — координаты точки P поверхности.

Введенных аксиом однако недостаточно, чтобы доказать, что прямые в этих координатах обладают дважды дифференцируемым параметрическим представлением $u^1(t)$, $u^2(t)$ и что они удовлетворяют системе дифференциальных уравнений вида (1). См. также РЖМат, 1955, 3379. Я. Н. Бланк

4076. Число вершин полиэдра. Саати (The number of vertices of a polyhedron. Saaty T. L.), Amer. Math. Monthly, 1955, **62**, № 5, 326—331 (англ.)

Пусть F_0 — число вершин и F_{n-1} — число $(n-1)$-мерных граней полиэдра в аффинном пространстве. Приводятся оценки числа вершин вида $F_0 \leqslant f(F_{n-1})$. Например,

$$F_0 \leqslant F_{n-1}!/(F_{n-1} - n)!n!. \qquad (1)$$

Кроме (1), даются другие оценки. Доказана теорема: Не существует для числа F_0 верхней границы вида $aF_{n-1} + b$, где a, b являются функциями от n, удовлетворяющей требованию

$$F_0 \leqslant aF_{n-1} + b \leqslant 2F_{n-1}!/(F_{n-1} - n + 1)!n!$$

для всех $F_{n-1} \geqslant n + 1$ и для $n = 4$ или $n \geqslant 7$. Автор отмечает, что хорошие оценки вида $F_0 \leqslant f(F_{n-1})$ позволяют точнее оценить время, потребное электронной вычислительной машине для решения задачи: найти значения x_i $(i = 1, \ldots, n)$, для которых форма $c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ имеет максимальное (минимальное) значение при условии $x_i \geqslant 0$ и $a_{j1}x_1 + \ldots + a_{jn}x_n \geqslant b_j$ $(j = 1, \ldots, m, a_{ji}, b_j, c_i$ суть константы). А. Е. Либер

4077. Размещения конгруэнтных сфер в неевклидовых пространствах. Коксетер (Arrangements of equal spheres in non-Euclidean spaces. Coxeter H. S. M.), Acta math. Sci. Acad. hung., 1954, **5**, № 3-4, 263—274 (англ.; рез. русс.)

В развитие исследований Тота (РЖМат, 1954, 2910) изучаются некоторые способы расположения сфер, которыми достигаются плотное заполнение и экономичное покрытие эллиптического и гиперболического трехмерных пространств и гиперболического пространства четырех измерений.

Показано, что можно заполнять и покрывать: 1) эллиптическое пространство трех измерений 60 конгруэнтными сферами, радиуса $\frac{\pi}{10}$, соответственно с плотностью 0,774 и 1,439; 2) трехмерное гиперболическое пространство орисферами, с плотностью 0,853 и 1,280; 3) четырехмерное гиперболическое пространство конечными конгруэнтными сферами, с плотностью 0,691 и 1,558. Эти результаты сопоставляются с соответственными результатами для евклидовых пространств трех и четырех измерений. Заслуживает внимания данное автором выражение объема сектора орисферы через площадь ограничивающей его орисферической поверхности. Библ. 21 назв. К. К. Мокрищев

ГЕОМЕТРИЯ ВЫПУКЛЫХ МНОГООБРАЗИЙ

4078. Одно характеристическое свойство эллипса. Зюсс (Eine charakteristische Eigenschaft der Ellipse. Süss Wilhelm), Math.-phys. Semesterber., 1954, **4**, № 1/2, 54—55 (нем.)

На плоскости рассматривается множество M выпуклых замкнутых линий таких, что две различные кривые этого множества имеют не более четырех общих точек и аффинный образ каждой линии из M принадлежит M. Доказывается, что M — совокупность эллипсов. Е. А. Морозова

4079. **Минимум площади выпуклой кривой при заданных диаметре и периметре. Хемми** (The minimum area of convex curves for given diameter and perimeter. Hemmi Denzaburo), Proc. Japan Acad., 1954, **30**, № 9, 791—796 (англ.)

Дается решение задачи на минимум, называемой автором (L, D) проблемой (задача на минимум для площади F овала при условии, что его диаметр D и периметр L удовлетворяют неравенствам $3D < L < \pi D$). Рассматриваются различные возможные случаи, для каждого из которых дается неравенство вместе с равенством, которому удовлетворяет F. Э. Г. Позняк

4080. **Замечание о полной кривизне замкнутых пространственных кривых. Фосс** (Eine Bemerkung über die Totalkrümmung geschlossener Raumkurven. Voss K.), Arch. Math., 1955, **6**, № 4, 259—263 (нем.)

Приводится новое доказательство многократно доказывавшейся теоремы: Для замкнутой пространственной дважды непрерывно дифференцируемой кривой $\oint ks\,ds \geqslant 2\pi$, причем равенство имеет место только для плоской выпуклой кривой (Fenchel W., Bull. Amer. Math. Soc., 1951, **57**, 44—54). Доказательство основано на вспомогательной теореме: Для каждой замкнутой поверхности с непрерывной кривизной справедливо неравенство

$$\int_{K>0} K\,d\sigma \geqslant 4\pi, \qquad (1)$$

где $d\sigma$ — элемент площади поверхности и интегрирование распространяется на все куски поверхности, на которых полная кривизна K положительна. Далее, неравенство (1) применяется для доказательства одной формулы Крофтона (Blaschke W., Abhandl. Math. Sem. Univ. Hamburg, 1936, **11**, 359—366). Автор утверждает, что его метод применим к кривым n-мерного пространства. А. Е. Либер

4081. **Касательные к овалам с двумя эквихордальными точками. Далмидж** (Tangents to ovals with two equichordal points. Dulmage Lloyd), Trans. Roy. Soc. Canada, 1954, Sec. 3, **48**, June, 7—10 (англ.)

Эквихордальной точкой (e-точкой) замкнутой кривой называется такая точка, что каждая прямая, проходящая через нее, пересекает кривую в двух точках, образуя хорду постоянной длины. До сих пор не решен вопрос о существовании замкнутых кривых с двумя эквихордальными точками. Вслед за Зюсом (Süss W., Tôhoku Math. J., 1925, **25**, 86—98) и Дираком Dirac G. A., J. London Math. Soc., 1952, **27**, 429—437) автор рассматривает выпуклые кривые с непрерывно вращающейся касательной, имеющие две e-точки, и доказывает для них следующие предложения: Задание двух e-точек однозначно определяет направление кривой в каждой ее точке. Не существует кривой, для которой отношение a расстояния между e-точками к постоянной длине хорды было бы $\geqslant 2\sqrt{2}/3\sqrt{3}$. (В упомянутой работе Дирак утверждает, что его вычисления устанавливают более сильные условия: не существует кривых, для которых $a > 0{,}4$, а также $a = 0{,}38$, $0{,}25$ или $0{,}2$). Е. С. Тихомирова

4082. **Однозначная определенность бесконечных выпуклых многогранников в пространстве Лобачевского. Данелич И. А.**, Матем. сб., 1954, **35** (77), № 3, 569—573

Опираясь на результаты, полученные А. Д. Александровым (Выпуклые многогранники, Гостехиздат, М.—Л., 1950, гл. II, III), автор доказывает: а) однозначную определенность бесконечных выпуклых многогранников с конечным числом бесконечно удаленных точек, б) при определенных условиях, сформулированных им, однозначную определенность бесконечных выпуклых многогранников с бесчисленным множеством бесконечно удаленных точек. К. К. Мокрищев

4083. **Построение замкнутых поверхностей отрицательной кривизны в E^4. Оцуки** (A construction of closed surfaces of negative curvature in E^4. Otsuki Tominosuke), Math. J. Okayama Univ., 1954, **3**, № 2, 95—108 (англ.)

Известно, что замкнутое n-мерное риманово многообразие, в каждой точке которого кривизна в направлении любой элементарной площадки неположительна, не может быть регулярно погружено в E^{2n-1} (РЖМат, 1956, 726). Можно ли такое многообразие погрузить в E^{2n}? Существование отдельных погружений такого вида автор подтверждает примером. В E^4 строится двумерная регулярная замкнутая поверхность с повсюду отрицательной гауссовой кривизной. Род этой поверхности равен 7. В построении используются трубчатые поверхности, образованные движением окружности. Попутно доказывается, что если центр окружности постоянного радиуса движется в E^4 вдоль регулярной замкнутой плоской кривой и плоскость окружности все время вполне перпендикулярна плоскости этой кривой, то получаемая поверхность имеет нулевую кривизну. В. А. Залгаллер

См. также: 3564, 3565, 3570, 3575, 3579, 3582, 3627, 3657, 3734, 3740, 3873, 3904, 3908, 3909, 3918

ЧИСЛЕННЫЕ И ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

4084. **О численном интегрировании обыкновенных дифференциальных уравнений. Урабе, Цусима** (On numerical integration of ordinary differential equations. Urabe Minoru, Tsushima Takeshi), J. Sci. Hiroshima Univ., 1953, **A17**, № 2, 193—219 (англ.)

Правые части уравнений

$$y' = f(x, y),\quad y'' = f(x, y, y') \qquad (1)$$

аппроксимируются, как функции x, интерполяционным полиномом Ньютона, после чего в (1) осуществляется почленное интегрирование. Посредством линейного комбинирования приближенных соотношений, получаемых таким путем при различных пределах интегрирования, устанавливаются для уравнений (1) конечно-разностные аппроксимации вида

$$y_{r+1} = \sum_{s=0}^{N} l_s y_{r-s} + h \sum_{\rho=0}^{p} \left(\alpha_{1,\rho}^{1} + \sum_{s=1}^{N} l_s \beta_{1,\rho}^{s}\right) \nabla^{\rho} f_r. \qquad (2)$$

Для коэффициентов $\alpha_{m,\rho}^{s}$ и $\beta_{m,\rho}^{s}$ приведены общие интегральные формулы, рекуррентные соотношения и таблицы значений этих коэффициентов для $m = 1,2$, $\rho = 0,1,\ldots,6$, $s = 1,2,\ldots,6$. Коэффициенты l_s должны удовлетворять в (2) условию $\sum_{s=0}^{N} l_s = 1$. Для приближенных соотношений типа (2) устанавливаются оценки погрешностей, на основании которых анализируется вопрос о рациональном выборе коэффициентов

l_s. Для различных наборов этих коэффициентов рассчитаны константы, фигурирующие в оценках погрешностей. На примере уравнения $y'' = -y'^2/y$ показано, что путем удачного выбора коэффициентов l_s можно получать конечно разностные формулы, обеспечивающие достаточную точность численного интегрирования при сравнительной своей простоте.
И. М. Рапопорт

4085. **Численное интегрирование обыкновенных дифференциальных уравнений интерполяцией Эрмита.** Квадэ (Numerische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen durch Interpolation nach Hermite. Quade Wilhelm), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 372—373 (нем.)

Указывается на возможность интерполирования (и экстраполирования) интеграла дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$ при непрерывной функции $f(x, y)$ полиномом, который определяется так, что в отдельных точках он будет совпадать с интегралом этого уравнения. При интерполировании по Эрмиту для указанных значений x_k должны быть известны значения y_k и y'_k. Таким образом получается полином, который использует для каждой абсциссы x_k и y_k и поле направлений дифференциального уравнения. Полиномы же могут быть получены разными путями, имеют различные виды, но отличаются большой точностью. Возможность применения интерполяционных полиномов Эрмита была рассмотрена И. С. Мухиным (Прикл. матем. и механика, 1952, **16**, 231—238).
С. С. Мусина

4086. **Некоторые дополнения к методу акад. С. А. Чаплыгина приближенного интегрирования дифференциальных уравнений.** Костин А. В., Сб. студ. науч. работ Одесск. ун-та, 1954, **3**, 241—248

Рассматривается один (не регулярный) способ построения первой «вилки» приближений при решении уравнения $y' = f(x, y)$ методом Чаплыгина и применение этого метода к нахождению функции, заданной неявно уравнением $F(x, y) = 0$. Работа иллюстрирована двумя примерами. Результаты автора не являются новыми.
Б. Н. Бабкин

4087. **Применение частичных вариационных принципов для решения дифференциальных уравнений.** Розен (Use of restricted variational principles for the solution of differential equations. Rosen Philip), J. Appl. Phys., 1954, **25**, № 3, 336—338 (англ.)

Рассматривается применение прямых методов вариационного исчисления для приближенного решения нелинейных дифференциальных уравнений. Идею метода поясним на примере, приведенном автором. Рассмотрим интеграл

$$I = \int_{x_1}^{x_2} [g(x, y)\, y' + (y^2/2)\, f(x, y, y')]\, dx, \qquad (1)$$

где y задано при x_2 и $g(x, y) = 0$ при x_1. Если положим $\delta I = 0$, считая при этом, что при вариации y значения $g(x, y)$ и $f(x, y, y')$ остаются неизменными, то получим следующее уравнение Эйлера—Лагранжа:

$$dg(x, y)/dx = yf(x, y, y'). \qquad (2)$$

Если исходить из (2), то для нахождения решения y мы должны искать минимум (1) при условии, что g и f остаются фиксированными. Если y искать в виде $y = G(x, \alpha)$, то полагая в (1) $g(x, y) = g(x, G(x, \beta))$, $f(x, y, y') = f(x; G(x, \beta); dG(x, \beta)/dx)$, найдем $I = I(\alpha, \beta)$. Полагая затем в уравнении $\partial I(\alpha, \beta)/\partial\alpha = 0$, $\beta = \alpha$, придем к уравнению относительно α.

В общем случае y можно представить как линейную комбинацию координатных функций с искомыми коэффициентами α_i, которые находятся из алгебраической системы. Более детально рассматривается в работе применение указанного метода к решению обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го и 2-го порядка и в качестве примера решается одно уравнение в частных производных.
В. П. Ильин

4088. **Метод Чаплыгина и его упрощение для уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа с двумя переменными.** Артемов Г. А., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 2, 197—200

Для уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, p, q)$ с начальными условиями $u|_l = u(t)$, $p|_l = p(t)$, $q|_l = q(t)$ находятся условия применимости метода Чаплыгина. Предполагается, что: 1) кривая l определяется уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, где x, y дважды непрерывно дифференцируемы и $y'_x < 0$ (условие 1) в [статье излишне); 2) $f(x, y, u, p, q)$ дважды непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам в области B_0, которая образована характеристиками, проведенными через концы дуги l, и расположена справа от l; 3) в области B_0 $f'_u > 0$, $f'_p > 0$, $f'_q > 0$. При выполнении этих условий утверждается справедливость теоремы о дифференциальных неравенствах. При дополнительных более жестких требованиях (квадратичная форма $f_{u^2}\xi^2 + f_{p^2}\eta^2 + f_{q^2}\gamma^2 + f_{up}\xi\eta + f_{uq}\xi\gamma + f_{pq}\eta\gamma \leqslant 0$, а также $f_{up} \geqslant 0$, $f_{uq} \geqslant 0$, $f_{pq} \geqslant 0$, $f_{xp} \leqslant 0$, $f_{yq} \leqslant 0$) строится двусторонний процесс Чаплыгина. Так как для рассматриваемой задачи даже линейный случай представляет большие трудности, то указывается метод нахождения приближений, при применении которого вычисляются только квадратуры. В конце статьи приводится пример.
В. А. Чечик

4089. **Применение метода прямых к решению краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных.** Юнусов К. С., Уч. зап. Казанск. гос. пед. ин-та, 1955, вып. 10, 57—83

Рассматривается применение метода прямых к некоторым краевым задачам. Например: 1) к решению задачи Дирихле для уравнения Пуассона в случае, если область ограничена криволинейной трапецией; 2) к решению уравнения Лапласа для прямоугольника при смешанных краевых условиях: на двух сторонах прямоугольника заданы значения функции, на двух других — значения нормальной производной; 3) к решению бигармонического уравнения $\Delta^2 u = 0$ при краевых условиях $u = \varphi_0$ и $\Delta u = \varphi_1$, для области, ограниченной криволинейной трапецией.

Для всех этих задач строится общее решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений, к которой приводит метод прямых. Для последней задачи в предположении существования и ограниченности производных до некоторого порядка от неизвестной функции дается оценка погрешности. Приведены числовые примеры для прямоугольника: уже при трех прямых погрешность в центре области не превосходит 0,001%.
А. Д. Кутасов

4090. **К решению методом сеток уравнений эллиптического типа с краевыми условиями, содержащими производные.** Волков Е. А., Докл. АН СССР, 1955, **102**, № 3, 437—440

Решается методом сеток краевая задача

$$u''_{xx} + u''_{yy} = qu - f; \quad a\frac{\partial u}{\partial n} + bu + c\frac{\partial u}{\partial s} + du = 0,$$

где g, f и a, b, c, d — известные функции x, y и дуги границы соответственно; u_n — производная по нормали к границе. Рассматриваются только аппроксимации на границе. Используя соотношение $u''_{xx} = u''_{ss} - ku'_s$, где k — кривизна кривой, и ряды Тейлора, автор по-

лучает ряд конкретных разностных аппроксимаций краевого условия, в случае решения без сноса граничных значений с истинного контура на сеточный. При этом увязываются значения функции в четырех точках: основной, лежащей на дуге, двух соседних, лежащих по обе стороны от основной на дуге, и точки, лежащей внутри области и не являющейся узловой. Точки последнего типа выражаются через узловые. Почти все граничные разностные аппроксимации имеют невязки порядка h^2. Рассмотрен особо случай многоугольных областей. Приведены результаты численного просчета. В. К. Саульев

4091. К вопросу решения задачи о собственных значениях методом конечных разностей. Саульев В. К., Вычисл. матем. и вычисл. техника, сб. 2, 1955, 116—144

Рассматривается вопрос о сходимости метода конечных разностей (со сносом граничных значений при помощи линейной интерполяции) для задачи о собственных значениях эллиптического дифференциального оператора

$$Lu \equiv \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_k}\left(a_k \frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + au$$

при краевом условии $u|_\Gamma = 0$, Предполагается, что четвертые производные от собственных функций непрерывны в замкнутой области. Устанавливается сходимость в среднем разностных собственных функций и доказывается неравенство $|\lambda_p^{(h)} - \lambda_p| \leqslant C_p h^{2-\varepsilon}$ для всех $h < \delta(p, \varepsilon)$, где h — шаг решетки, λ_p — собственное значение с номером p, $\lambda_p^{(h)}$ — разностное собственное значение с номером p, C_p — постоянная, выражающаяся через наибольшие значения абсолютных величин производных собственной функции u_p. В случае общего самосопряженного эллиптического дифференциального оператора второго порядка доказано неравенство $|\lambda_p^{(h)} - \lambda_p| \leqslant C_p h$. Д. М. Эйдус

4092. О вариационных методах Лейбензона и Ритца, для которых координатные функции выбираются в виде частных решений уравнений Ляме. Цай И. П., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 15, 143—156

Предлагается следующая методика применения прямых методов математической физики к решению граничных задач статики изотропного упругого тела: вычисляются точные решения уравнений Ляме и составляются их линейные комбинации с неизвестными множителями, которые затем определяются или из условия минимума средней квадратичной ошибки граничных условий (метод Лейбензона), или из условия минимума потенциальной энергии (метод Ритца). Точные решения уравнений Ляме вычисляются в сферических координатах с помощью двух частных случаев общей формулы референта (Докл. АН УзССР, 1950, № 3)

$$\overline{u} = \overline{G} + \overline{H} + \operatorname{grad}(g - \lambda_0(\overline{r}, \overline{G})) + \operatorname{rot}(\overline{h} - \varkappa_0[\overline{r}, \overline{H}])$$

1) $\overline{H} = \overline{h} = 0$ (решение Папковича), 2) $\overline{G} = g = 0$ (решение Аржаных). Вычислены также составляющие тензора напряжений для указанных частных решений. Построены уравнения для определения коэффициентов разложения как для первой граничной задачи, так и для второй (внутренние). И. С. Аржаных

4093. Об одном способе приближенного решения интегральных уравнений Фредгольма. Гребенюк Д. Г., Тр. Ин-та матем. и механ. АН УзССР, 1955, вып. 15, 107—110

Статья, примыкающая к серии работ автора (Тр. Среднеаз. ун-та, сер. матем., 1939, вып. 18; Тр. Ин-та матем. АН УзССР, 1949, вып. 6; 1951, вып. 8) по приложению теории полиномов, наименее уклоняющихся от нуля, к приближенному решению дифференциальных уравнений и вычислению определенных интегралов, посвящена задаче, сформулированной в заглавии.

Решение уравнения

$$\Phi[\varphi(x)] \equiv \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, s)\varphi(s)ds = f(x),$$

где K и f — заданные непрерывные функции, представляется в форме обобщенного полинома

$$\varphi(x) \approx P_{n+1}(x) = p_1\psi_1(x) + \ldots + p_{n+1}\psi_{n+1}(x),$$

где $\psi_i(x)$ — заданные функции, непрерывные на $[a, b]$, а коэффициенты p_i отыскиваются так, чтобы полином

$$\Phi[P_{n+1}(x)] = Q_{n+1}(x) = p_1 b_1(x) + \ldots + p_{n+1} b_{n+1}(x)$$

наименее уклонялся от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Здесь

$$b_i(x) = \psi_i(x) - \int_a^b K(x, s)\psi_i(s)\,ds.$$

Функции $\psi_i(x)$ подбираются так, чтобы $b_i(x)$ образовали в интервале (a, b) систему функций Чебышева. В этом случае для определения коэффициентов p_i служит система уравнений

$$F(x_i) = (-1)^i L \quad (i = 1, 2, 3, \ldots, n+2),$$
$$F'(x_i) = 0 \quad (i = 2, 3, \ldots, n+1),$$

где $x_1 = a$, $x_2, \ldots, x_{n+1}$, $x_{n+2} = b$ — те значения x, при которых разность $f(x) - Q_{n+1}(x) = F(x)$ достигает значений $\pm L$. Число L дает погрешность наилучшего приближения $Q_{n+1}(x)$ к $f(x)$.

Приводимые автором числовые примеры тривиальны и не дают представления ни о трудностях вычислительной работы, ни о величине погрешности приближения полиномов $P_n(x)$ к искомой функции $\varphi(x)$. К. Н. Юрчук

4094. Оценка точности вычисления собственных чисел аппаратом непрерывных дробей. Стесин И. М. Вычисл. матем. и вычисл. техника, сб. 2, 1955, 145—150

Для интегрального однородного уравнения Фредгольма 2-го рода с симметричным положительно определенным ядром и множеством λ_i $(i = 1, 2, \ldots)$ собственных чисел доказано, что величины $h_{n,i} = \varkappa_i - z_{n,i}$ с точностью до бесконечно малых 3-го порядка удовлетворяют неравенствам:

$$-\frac{Q_{2n+1}(-z_{2n,i})}{Q'_{2n}(-z_{2n,i})z_{2n,i}}\left[1 - \frac{b_{2n} + b_{2n+1}}{z_{2n,i-1} - z_{2n,i}}\right] < h_{2n,i} <$$

$$< -\frac{Q_{2n+1}(-z_{2n,i})}{Q'_{2n}(-z_{2n,i})z_{2n,i}}\left[1 + \frac{b_{2n} + b_{2n+1}}{z_{2n,i} - z_{2n,i+1}}\right]$$

и аналогично для $h_{2n+1,i}$, где $\varkappa_i = 1/\lambda_i$; $z_{n,i}$ — корни знаменателей $Q_n(-z)$ подходящих дробей $P_n(z)/Q_n(z)$, а числа b_i, получающиеся обращением ряда $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n c_n/z^{n+1}$ в непрерывную дробь вида

$$\cfrac{1}{z + \cfrac{b_1}{1 + \cfrac{b_2}{z + \ldots}}},$$

удовлетворяют условию $\Sigma_{i=1}^{\infty}\varkappa_i = \Sigma_{i=1}^{\infty} b_i$. Доказательство неравенств указанных оценок дано для четных n, исходя из интегральных соотношений для подходящих дробей. Ф. С. Чуриков

4095. **О построении приближенного решения в линейных задачах. Слободянский М. Г.,** Прикл. матем. и механика, 1955, 19, № 5, 571—588

В гильбертовом пространстве H даны сопряженные уравнения $Au = f$, $A^*v = \psi$. Ставится задача о приближенном вычислении скалярного произведения $(f, v) = (u, \psi)$ и об оценке погрешности приближения. Пусть u_n, v_n — приближенные решения упомянутых уравнений и $f_n = Au_n$, $\psi_n = A^*v_n$. Введем еще обозначения $b_n = (u_n, \psi) + (f - f_n, v)$, $u' = u - u_n$, $v' = v - v_n$, $\varphi = f - f_n$, $\chi = \psi - \psi_n$. Пусть найдены такие постоянные μ_0 и ρ, что $\| A^{-1} - \mu_0 E \| < \rho$. Тогда верна оценка $|(u, \psi) - [b_n + \mu_0(\varphi, \chi)]| < \rho \| \varphi \| \cdot \| \chi \|$. В частности, если оператор A самосопряженный и его спектр лежит вне интервала $m < \lambda < M$, $m < 0$, $M > 0$, то $|(u, \psi) - [b_n + (1/M + 1/m)(\varphi, \chi)/2]| < (1/M - 1/m) \| \varphi \| \cdot \| \chi \| /2$. Отмечены и некоторые другие частные случаи, относящиеся к самосопряженным операторам. Некоторые оценки приведены для того случая, когда φ принадлежит области определения оператора A^*.

Даны некоторые указания относительно того, каким из распространенных методов (Ритца, наименьших квадратов и др.) следует строить u_n и v_n, чтобы оценка погрешности была по возможности лучше. Автор предлагает также свой способ приближенного решения, основанный на введении некоторого нового функционала; этот способ в какой-то мере обобщает известное преобразование Фридрихса.

В качестве примеров рассмотрены краевая задача для обыкновенного дифференциального уравнения и задача об изгибе защемленной пластинки. С. Г. Михлин

4096. **Метод осреднения в применении к определению собственных значений операторного уравнения. Чернышенко** (Метод осереднення в застосуванні до визначення власних значень операторного рівняння. Чернишенко Е. А.), Доповіді АН УРСР, 1955, № 3, 217—221 (укр.; рез. русс.)

Рассматривается уравнение

$$L\varphi = \mu\varphi, \qquad (1)$$

где L — линейный, вполне непрерывный оператор в пространстве $C[0, 1]$, отличный от оператора аннулирования. L предполагается самосопряженным и положительно определенным. В пространстве $C[0, 1]$ задается линейный функционал осреднения

$$\alpha = S\varphi = (e, \varphi) = \int_0^1 \varphi(t)\,dt, \quad e \equiv 1.$$

Пусть μ_1 — наибольшее собственное значение уравнения (1). Указывается алгоритм для определения ν_k — приближений к μ_1. Именно, $\nu_1 = SLe$; ν_2 — наибольший из корней квадратного уравнения

$$\begin{vmatrix} SL^2e - \nu_2 SLe & \nu_1 SLe - \nu_2\nu_1 \\ L_\tau^2 e - \nu_2 L_\tau e & \nu_1 L_\tau e \end{vmatrix} = 0,$$

где $L_\tau^m e\,(m = 1, 2)$ — значение $L^m e$ в некоторой точке τ из промежутка $[0, 1]$. ν_n определяется как наибольший корень алгебраического уравнения степени n, записанного в виде определителя n-го порядка. Приводится без доказательства теорема о сходимости последовательности ν_n к μ_1, при этом указываются оценки для μ_1. Рассмотрен числовой пример. И. П. Мысовских

4097. **Приближенное решение операторных уравнений на основе метода С. А. Чаплыгина. Слугин С. Н.,** Докл. АН СССР, 1955, 103, № 4, 565—568

Приводятся две теоремы, относящиеся к обобщению процесса С. А. Чаплыгина на функциональные уравнения в полуупорядоченном пространстве. Процесс теоремы 2 применяется:

1) к решению задачи Коши для уравнения $y^{(m)} - f(x, y, \ldots, y^{(m-1)}) = 0$; поправки $\Delta y_n = y_{n+1} - y_n$ определяются из уравнения $[(\Delta y_n)' + A_1(\Delta y_n)/2]' + [(\Delta y_n)' + A_1\Delta y_n/2]\,A_1/2 = f(x, y_n, y_n') - y_n''$ (в случае $m = 2$);

2) к решению дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом: $F[y] \equiv F(t, y(t), \ldots, y^{(m)}(t); y(t - \tau(t)), \ldots, y^{(m-1)}(t - \tau(t))) = 0$; поправки Δy_n находятся из обычных дифференциальных уравнений: $(\Delta y_n)^{(m)} = -F[y_n]$; при наличии специальных начальных приближений и выполнении условий:

$$0 < A \leqslant \partial F/\partial y^{(m)} \leqslant 1; \quad -c \leqslant \partial F/\partial y^{(k)}(t) \leqslant 0;$$

$$-c \leqslant \partial F/\partial y^{(k)}(t - \tau(t)) \leqslant 0, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

последовательность y_n монотонно (вместе с производными) сходится к решению. Имеются опечатки. А. Н. Балуев

4098. **О вычислении интегралов от быстро колеблющихся функций и об экспоненциальной интерполяции. Погребысский И. Б.,** Укр. матем. ж., 1955, 7, № 3, 291—294

Для приближенного вычисления интеграла $\int_a^b f(y)e^{i\lambda y}dy$ предлагается применить экспоненциальную интерполяцию, т. е. заменить «амплитудный множитель» $f(y)$ выражением вида $\Sigma_k A_k e^{\beta_k^* y}$. Показывается, что построение приближенного n-членного выражения $\Sigma_{k=1}^{n} A_k e^{\beta k y} \approx f(y)$ для функции $f(y)$, заданной при $2n$ равноотстоящих значениях аргументов, сводится к решению двух систем уравнений первой степени по n уравнений в каждой и одного уравнения степени n. Изложение чисто алгебраическое. Автор указывает, что аналогичный прием был дан ранее Прони, исходя из решений уравнений в конечных разностях (Уиттекер-Робинсон, Математическая обработка результатов наблюдений, ГТТИ, 1935, стр. 343—344). Дана подробная схема вычислений для $n = 3$. П. Г. Конторович

4099. **О некоторых интегралах типа Липшица — Ханкеля, содержащих произведения бесселевых функций. Исон, Нобл, Снеддон** (On certain integrals of Lipschitz-Hankel type involving products of Bessel functions. Eason G., Noble B., Sneddon I. N.), Philos. Trans. Roy. Soc. London, 1953, A247, № 935, 529—551 (англ.)

Рассматриваются интегралы вида $I(\mu, \nu; \lambda) = \int_0^\infty J_\mu(at) J_\nu(bt) e^{-ct} t^\lambda dt$ или $J(\mu, \nu; \lambda) = \int_0^\infty J_\mu(\xi) \times J_\nu(\rho\xi) e^{-\zeta\xi} \xi^\lambda d\xi$ ($\rho = b/a$, $\zeta = c/a$, $\xi = at$, $I = a^{-\lambda-1}J$), встречающиеся в некоторых задачах механики и теории потенциала. В некоторых простых случаях они могут быть выражены через эллиптические интегралы. Построены разложения интегралов, позволяющие выделить «главные части» в тех случаях, когда: 1) ρ — малая величина, 2) ρ близко к единице и ζ мало, 3) c — малая величина. Приведены таблицы значений $I(0,0,1)$, $I(0,1,1)$, $I(1,0,1)$, $I(1,1,1)$, $I(0,0,0)$, $I(1,0,0)$, $I(0,1,0)$, $I(1,1,0)$, $I(0,1,-1)$, $I(1,0,-1)$, $I(1,1,-1)$ при $\rho = 0{,}0$ (0,2)2,0 и $\rho = 3{,}0$, $\zeta = 0{,}0$(0,2)2,0 и $\zeta = 3{,}0$.

Статья содержит также некоторые другие таблицы, характеризующие изменение интегралов $I(\mu, \nu; \lambda)$. В. И. Крылов

4100. **Приближенное вычисление интеграла** $\int_c f(u)/\{w(u)-w(q)\}^2\,du$. **Денглер** (Numerische Lösung des Integrals $\int_c f(u)/\{w(u)-w(q)\}^2\,du$. Denglер Max), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 12, 471—474 (нем.)

Даются два способа для приближенного вычисления комплексного интеграла вида $\int_c f(u)/\{w(u)-w(q)\}^2 du$, где функции $f(u)$ и $w(u)$ заданы только для конечного числа действительных значений аргумента из некоторого сегмента $[a, b]$. Предполагается, что: а) $f(u)$ и $w(u)$ на $[a, b]$ — однозначные действительные функции; б) $f(u)\geqslant 0$ на $[a, b]$; в) $f(u)$ и $w(u)$ регулярны в некоторой области, содержащей внутри $[a, b]$; г) контур интегрирования представляет собой дугу без самопересечения, соединяющую точку $(a, 0)$ с какой-либо точкой $(y, 0)$ сегмента $[a, b]$ и расположенную целиком в верхней полуплоскости; д) $a<q<y\leqslant b$. Один из указанных автором способов основан на преобразовании контура интегрирования и приведении рассматриваемого интеграла к интегралу от функции, регулярной при $u=q$. При этом способе необходимо знать $f(q)$, $f'(q)$, $w(q)$, $w'(q)$, $w''(q)$.

Второй способ опирается на аналитическое продолжение подинтегральной функции (с помощью интерполяционного полинома). Интегралы рассматриваемого вида встречаются в теории пограничного слоя. Приводятся примеры. М. Б. Балк

4101. **Некоторые новые результаты численного анализа. Таппер** (Some new results in numerical analysis. Tupper Sydney John), Proc. Internat. Congr. Math., 1954, **2**, Amsterdam, 1954, 387—388 (англ.)

1) Метод экстраполяции для уточнения нескольких первых значений итерационного процесса дает итерационный процесс с улучшенной сходимостью и даже сходящийся в тех случаях, когда первоначальный процесс расходится. Метод применим и к системе уравнений.

2) Общий метод разложения определенного интеграла по степеням оператора сдвига дает все известные формулы механических квадратур; выведена новая формула Симпсона и Чебышева (формула не приводится). М. Л. Бродский

4102. **Некоторые тригонометрические, гиперболические и эллиптические приближения. Фрейм** (Some trigonometric, hyperbolic and elliptic approximations. Frame J. S.), Amer. Math. Monthly, 1954, **61**, № 9, 623—626 (англ.)

Устанавливаются некоторые неравенства, содержащие тригонометрические и гиперболические функции и некоторые оценки для неполного эллиптического интеграла первого и второго родов. Неравенства дают оценки для аргумента через значения тригонометрических и гиперболических функций этого аргумента и через квадрат самого аргумента. При их использовании более точная оценка может быть получена по грубой. Оценка эллиптических интегралов производится по верхнему пределу интегрирования и по параметру k^2. К. Е. Чернин

4103. **Оценка собственных значений эрмитовых матриц. Виландт** (Einschließung von Eigenwerten Hermitescher Matrizen nach dem Abschnittsverfahren. Wielandt H.), Arch. Math., 1954, 5, № 1—3, 108—114 (нем.)

Пусть

$$L=\begin{pmatrix}A & B\\ B^* & C\end{pmatrix},\qquad D=\begin{pmatrix}0 & B\\ B^* & C\end{pmatrix},$$

где A, B и C — матрицы. Пусть λ_k — собственные числа матрицы L, а α_k — матрицы A. Тогда

1) $\Sigma_k|\lambda_k^2-\alpha_k^2|=$ след D^2;

2) $0\leqslant\lambda_k^2-\alpha_k^2\leqslant 2\|D\|^2$;

3) $0\leqslant\lambda_k-\alpha_k\leqslant\|D\|^2/\alpha_k$ $(k>0)$.

Аналогичная оценка проводится для бесконечных матриц, для которых существуют соответствующие следы. Ю. А. Шрейдер

4104. **Собственные значения матриц. Врис** (Eigenwaarden van matrices. Vries D. de), Tijdschr. kadaster en landmeetkunde, 1953, 69, № 5, 316—322 (голл.)

В связи с подготовкой нового справочного руководства Кадастровое управление поручило своему вычислительному бюро изучение свойств симметричных квадратных матриц четных рангов (до 24 ранга включительно) с точки зрения возможности использования их в геодезических вычислениях. Автор излагает полученные результаты и иллюстрирует их на примере матрицы четвертого ранга. Исследование показало, что разработанный Кадастровым управлением способ уравнительных вычислений при помощи матриц представляет ряд практических удобств и при известных условиях может значительно сократить и облегчить труд вычислителя. Библ. 8 назв. В. Т. Наумова

4105. **Одно обобщение метода сопряженных градиентов для решения систем линейных алгебраических уравнений. Кертисс** (A generalization of the method of conjugate gradients for solving systems of linear algebraic equations. Curtiss J. H.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1954, 8, № 48, 189—193 (англ.)

Решается система линейных уравнений

$$A\xi=\eta. \tag{1}$$

В предложенном для этой цели методе сопряженных градиентов (Hestenes M. R., Stiefel E., J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, **49**, 409—436) фигурирует некоторая положительно определенная матрица S. Обобщение метода сопряженных градиентов в реферируемой статье состоит в том, что матрица S пишется в форме $S=BATA'B'$, где T — положительно определенная, а B — произвольная матрица. Если взять вектор ξ_0 за исходное приближение к решению ξ системы (1) и положить $\rho_k=\eta-A\xi_k$, то последовательные приближения по обобщенному методу вычисляются по следующим формулам:

$$\delta_0=B\rho_0, \tag{2}$$

$$a_k=\frac{(B\rho_k)'\,B\rho_k}{\delta_k'BATA'B'\delta_k},\quad k=0,1,\ldots,n-1, \tag{3}$$

$$\rho_{k+1}=\rho_k-a_kATA'B'\delta_k,\quad k=0,1,\ldots,n-1, \tag{4}$$

$$b_k=\frac{(B\rho_{k+1})'\,B\rho_{k+1}}{(B\rho_k)'\,B\rho_k},\quad k=0,1,\ldots,n-2, \tag{5}$$

$$\delta_{k+1}=b\rho_{k+1}+b_k\delta_k,\qquad k=0,1,\ldots,n-2, \tag{6}$$

$$\xi_{k+1}=\xi_k+a_kTA'B'\delta_k,\quad k=0,1,\ldots,n-1, \tag{7}$$

при этом искомое решение $\xi=\xi_k$, $k\leqslant n$ (вообще говоря, $k=n$). Соответствующий выбор T и B определяет конкретный алгоритм (2)—(7). Автор рассматривает три случая такого выбора:

1. $B=E$, $T=A^{-1}$, где A — положительно определенная матрица. Здесь алгоритм (2)—(7) представляет собой метод сопряженных градиентов в основной его форме.

2. $B=A'$, $T=(A'A)^{-1}$. При этом получается предложенный Хестенесом и Штифелем в цитированной статье метод решения системы (1) в случае, когда A— произвольная матрица.

3. $B=E$, $T=E$. В данном случае получается алгоритм, эквивалентный методу Крейга (Craig E. J., Iteration procedurs for simultaneous equations. Doctoral dissertation, Cambridge, Mass., 1954).

Число умножений в предложенных алгоритмах имеет порядок $2n^3$. Из последних двух алгоритмов с этой точки зрения несколько предпочтительнее метод Крейга.

А. Я. Белостоцкий

4106. О системах линейных уравнений со свойством $\lim_{\nu\to\infty}(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^\nu=0$. **Буркхард** (Über spezielle lineare Gleichungssysteme mit der Eigenschaft $\lim_{\nu\to\infty}(\mathfrak{E}-\mathfrak{A})^\nu$ Nullmatrix. Burkhardt Felix), Wiss. Z. Univ. Leipzig, 1952/53, № 5, 187—192 (нем.)

Исследуются системы линейных уравнений $\mathfrak{A}\mathfrak{X}=\mathfrak{B}$, где $\mathfrak{A}$ — квадратная матрица, $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{B}$ — столбцовые матрицы. Предполагается, что матрица $\mathfrak{M}=\mathfrak{E}-\mathfrak{A}$ ($\mathfrak{E}$ — единичная матрица) удовлетворяет условию $\lim_{\nu\to\infty}\mathfrak{M}^\nu=0$. Итеративный процесс, предлагаемый автором для решения таких систем, основан на представлении решения в виде ряда $\mathfrak{X}=\mathfrak{B}+\mathfrak{M}\mathfrak{B}+\mathfrak{M}^2\mathfrak{B}+\ldots$. Приводится схема для вычисления, даются достаточные условия для сходимости процесса и в конце краткий обзор способов решения систем линейных уравнений.

Ф. А. Иванов

4107. Об одном методе численного решения вполне регулярных систем линейных уравнений и о его применении к статическому решению стержневых конструкций. **Бабушка** (O jednom numerickém řešení úplne regulárních systémů linearních rovnic a o jeho aplikaci na statické řešení patrových rámů Babuška Ivo), Časop. pěstov. mat., 1955, **80**, № 1, 60—88 (чеш.; рез. русс., нем.)

В строительной практике пользуются для решения систем линейных уравнений некоторым методом, называемым по его физическому смыслу методом разведения деформаций. Этот метод ввел Клоучек (C. V. Klouček) в своих книгах «Rozvod deformací» (Praha, 1950) и «Distribution of deformation (a new method of structural analysis)» (Prague, 1949). До сих пор не было известно, при каких предположениях можно применять этот метод. Автор обобщает метод Клоучека и доказывает, что приближенное решение, полученное этим методом, сходится к решению данной системы линейных уравнений, если матрица $A=(a_{ij})$ системы линейных уравнений удовлетворяет следующим условиям: 1) A является симметрической матрицей; 2) $a_{ii}=\alpha_i\sum_{j,j\neq i}|a_{i,j}|$; $\alpha_i>\alpha>1$. Этот метод можно применить и к решению бесконечных систем линейных уравнений, если выполняется условие 3) $0<k<a_{ii}<K<+\infty$. Автору теперь известно, что метод можно применять при значительно более общих предположениях о матрице A.

Jaroslav Kurzweil

4108. Об алгоритмизации методов последовательных исключений. **Важевский** (Sur l'algorithmisation des méthodes d'éliminations successives. Ważewski Tadeusz), Ann. Soc. polon., 1953, **24**, № 2, 157—164 (франц.)

Заметка является ответом автора на полемическую статью Банахевича (РЖМат, 1954, 4745). J. Szarski

4109. Определение всех вещественных корней алгебраических уравнений с помощью интегратора. **Маруашвили Т. И.,** Сообщ. АН ГрузССР, 1954, 15, № 5, 265—270

Дается способ нахождения всех вещественных корней алгебраических уравнений с помощью интегратора, предназначенного для интегрирования систем обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Интегратор должен выдавать искомые интегралы на экране в виде непрерывных графиков, меняющихся мгновенно с изменением начальных условий или коэффициентов заданной системы. Предполагается, что первый корень λ_1 известен. Для отыскания следующих корней на интеграторе устанавливается система n обыкновенных дифференциальных уравнений, соответствующим образом составленная для заданного алгебраического уравнения. Затем к диагональным элементам ее матрицы добавляется число λ_1. Путем варьирования параметра λ в начальных условиях, которые имеют вид:

$$y(0)=1;\ y'(0)=\lambda;\ y''(0)=\lambda^2;\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0)=\lambda^{n-1},$$

добиваются, чтобы функции, изображенные на экране, стремились к нулю при $t\to\infty$. Каждое такое λ является корнем уравнения. Способ позволяет определить кратность корня. Если установлено, что λ_p является корнем уравнения, то для отыскания его кратности устанавливаются начальные условия:

$$y(0)=0;\ y'(0)=1;\ y''(0)=2\lambda_p;\ \ldots;$$

$$y^{(n-1)}(0)=(n-1)\lambda_p^{n-2}.$$

Если корень кратный, то полученные на экране функции стремятся к нулю при $t\to\infty$, в противном случае это обстоятельство не имеет места. Л. С. Клабукова

4110. Об одном итерационном методе разложения многочленов на множители. **Палувер Н. В.,** Тр. Таллинск. политехн. ин-та, 1955, **А**, № 62, 9 стр.

Пусть $F_n(x)$ — многочлен степени n, который требуется разложить на множители, и пусть $F_n(x)=P_m(x)\times Q_{n-m}(x)$. Некоторый многочлен $P_m^{(0)}(x)$ выбирается в качестве приближения множителя $P_m(x)$. Тогда одна итерация по предлагаемому методу состоит в следующем: 1) $F_n(x)$ делят в порядке убывающих степеней x на $P_m^{(0)}(x)$ до получения остатка $R_{m-1}^{(0)}(x)$; 2) полученное от первого деления частное $Q_{n-m}^{(0)}(x)$ делят на $P_m^{(0)}(x)$ в порядке убывающих степеней x до получения остатка $S_{m-1}^{(0)}(x)$; 3) $R_{m-1}^{(0)}(x)$ делят на $S_{m-1}^{(0)}(x)$ в порядке возрастающих степеней x до получения частного $\Delta_m^{(0)}P(x)$ (степени m); 4) вычисляют $P_m^{(1)}(x)=P_m^{(0)}(x)+\Delta_m^{(0)}P(x)$, который после деления на коэффициент при x^m берется за новое приближение.

Приведен числовой пример. А. Я. Белостоцкий

4111. Приближенное выражение для длины дуги эллипса. **Вейданц** (Eine verbesserte Näherungsgleichung für den Ellipsenumfang. Weydanz W.), Z. angew. Math. und Mech., 1954, **34**, № 4—5, 194—195 (нем.)

Дается приближенная формула для четверти длины дуги эллипса $s=[\pi ab+(a-b)^2]/(a+b)$. Указывается, что эта формула в ряде случаев точнее, чем приведенные в справочнике для инженеров. Дается относительная погрешность этой формулы и ранее известных при различных значениях b/a.

Ю. А. Шрейдер

4112. Способ приближения. Массо (Procédé d'approximation. Massot Pierre), Mem. Soc. ingrs civils France, 1954, **107**, № 4, 365—373 (франц.)

Данная непрерывная функция $z = F(x)$, изображаемая кривой Σ, заменяется некоторой функцией Δ, непрерывной на промежутке аппроксимации. Для построения ее берется соответствующая аппроксимирующая функция $f(x)$, заданная графиком или аналитическим выражением. Затем находят функции $z_1 = k_1 f(x)$ и $z_2 = k_2 f(x)$; причем вещественные постоянные k_1 и k_2 берутся с таким расчетом, чтобы соответствующие дуги z_1 и z_2 «охватывали» дугу данной кривой Σ снизу и сверху. Искомой аппроксимирующей функцией (кривой наименьшей погрешности) является $\Delta = [2k_1 \cdot k_2/(k_1 + k_2)]\, f(x)$; при этом относительная погрешность не превосходит величины $\varepsilon = (k_2 - k_1)/(k_2 + k_1)$. Если ε задано, то k_1 и k_2 должны быть взяты с таким расчетом, чтобы удовлетворялось равенство $k_1/k_2 = (1 - \varepsilon)/(1 + \varepsilon)$. «Кривая наименьшей погрешности» в частном случае может быть прямой $\Delta = [2k_1k_2/(k_1 + k_2)]\,(x - m)\,(m = \text{const})$. Аналогично этому рассматриваются поверхности или соответственно плоскости наименьшей погрешности, аппроксимирующие данную поверхность $F(x, y)$. Приведены примеры. А. Б. Штыкан

4113. Номографическое решение трехчленного уравнения n-й степени. Левит Д. Е., Электричество, 1954, № 11, 96—97

Приведена номограмма из выравненных точек уравнения $x^n + px + q = 0$, где n может быть равно $^1/_3$, 3, 4 и 5. Номограмма состоит из равномерной прямолинейной шкалы переменного p для $-10 \leqslant p \leqslant 10$, равномерной прямолинейной шкалы переменного q для $-100 \leqslant q \leqslant 10$ и четырех криволинейных шкал переменного x для каждого из значений n: для $0 \leqslant x \leqslant 100$, когда $n = {}^1/_3$; для $0 \leqslant x \leqslant 5{,}3$, когда $n = 3$; для $0 \leqslant x \leqslant 3{,}4$, когда $n = 4$. Указывается, что когда данные значения p и q выходят за пределы шкал номограммы, то можно применить преобразование: $p' = p/\lambda^{n-1}$, $q' = q/\lambda^n$, выбрав λ так, чтобы p' и q' нашлись на номограмме. Тогда решение уравнения x будет равно $x = \lambda x'$, где x' — ответ, полученный по номограмме для p' и q'. Номограмма позволяет найти действительные корни уравнения. Замечание автора о том, что уравнение n-й степени линейными подстановками можно всегда привести к трехчленному виду, ошибочно.

М. В. Пентковский

4114. Номограммы для расчета трубопроводов. Путята В. И., Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1954, **2**, 31—40

Излагается общий метод построения номограмм, пригодный для любой зависимости коэффициента гидравлического сопротивления от числа Рейнольдса и относительной шероховатости. Для построения номограммы для подбора диаметра автор преобразует уравнение для потери напора, выражая диаметр через расход и число Рейнольдса. При этом получаются уравнения для двух шкал номограммы и уравнение бинарного поля. В качестве примера построена номограмма применительно к формуле Никурадзе. Коэффициенты в этой формуле приняты из работы автора (Тр. Куйбышевск. авиац. ин-та, 1952, вып. 1). Подобным образом построена номограмма для вычисления расхода. В заключение автор дает рекомендации по использованию предложенных номограмм для расчета труб некруглого сечения. В. С. Яблонский

4115. Номограммы для определения полосы пропускания низкочастотных импульсных фильтров. Адамс, Стоут (Bandwidth nomograph for pulse filter network. Adams B. L., Stout T. M.), Electronics, 1953, **A26**, № 6, R4—R5 (англ.)

При прохождении импульса через фильтр форма импульса искажается вследствие ограниченной полосы пропускания фильтра. Вопрос о выборе оптимальной полосы пропускания фильтра авторы решают исходя из энергетических соотношений между входным и выходным сигналами. Эффективность фильтра определяется как отношение энергии на входе к энергии на выходе. Выбор ширины полосы пропускания фильтров указанных типов по заданной эффективности фильтра может быть упрощен применением номограммы, приведенной в статье. Номограмма имеет три шкалы: длительность импульса, эффективность фильтра, ширина полосы пропускания фильтра. Г. А.

4116 К. Восьми- и девятизначные таблицы эллиптических функций, представленных посредством параметра Якоби q. Шулер, Гебелейн (Acht- und neunstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q. Schuler M., Gebelein H., Berlin—Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1955, 296 S.) (нем., англ.)

Таблицы предназначены для вычислительных работ высокой точности (8—9 знаков), связанных с эллиптическими и тета-функциями Якоби. В качестве независимых переменных взяты параметр Якоби q и $z = \cos 2x = \cos \pi u/K$. Книга содержит:

1) таблицу функции $G(q^4, z) = -\dfrac{\vartheta_1(x) - 2q^{1/4}\sin x}{2q^{9/4}\sin x}$ в которой основным табличным входом является вход по z. Характеристики таблицы следующие: $z = -1(0{,}05)1$; $q^4 = 0{,}001\,(0{,}001)\,0{,}1$; точность — 9 десятичных знаков. Даны первые и вторые разности и соответствующие q^4 значения q и θ, где θ — модуль Лежандра;

2) таблицу функции $G(q^4, z)$ с основным табличным входом по переменному q^4. Отличается от предыдущей таблицы тем, что начальное значение $q^4 = 0$ и имеется столбец только первых разностей;

3) таблицу функции $H(q^3, z) = \dfrac{\vartheta_3(x) - 1}{q}$ с основным входом по переменному z. $z = -1\,(0{,}05)\,1$; $q^3 = 0{,}002\,(0{,}002)\,0{,}176$; точность — 9 десятичных знаков. Приведены первые и вторые разности и соответствующие q^3 значения q и θ;

4) таблицу функции $H(q^3, z)$ с основным входом по переменному q^3 и первыми разностями. Отличается от таблицы III тем же, чем таблица 2 от таблицы 1;

5) таблицу функций $\lg(\operatorname{sn} u/\sin x)$, $\lg(\operatorname{cn} u/\cos x)$ и $\lg \operatorname{dn} u$ с табличным выходом по z. $z = -1\,(0{,}05)\,1$; $q = 0{,}01\,(0{,}01)\,0{,}55$; точность табличных значений 8 десятичных знаков, причем ошибка в некоторых случаях может достигать 2-х единиц последнего десятичного знака. Таблица снабжена первыми разностями и соответствующими q значениями θ, $-\lg\cos\theta = -\lg k'$, K и K/E;

6) таблицу функций $\lg(\operatorname{sn} u/\sin x)$, $\lg(\operatorname{cn} u/\cos x)$ и $\lg \operatorname{dn} u$ с выходом по переменному q. В отличие от таблицы 5 q имеет начальное значение нуль;

7) таблицу функции $1/(1 - q)$, K и K/E от переменного $-\lg\cos\theta = -\lg k' = 0\,(0{,}005)\,3$ с 8-ю десятичными знаками и первыми разностями.

Функции G и H являются вспомогательными, через которые простыми вычислениями находятся ϑ-функции. В большинстве таблиц параметр Якоби q меняется до 0,55, что соответствует $\theta = 89°56{,}42$ и охватывает практически наиболее важную область его изменения.

Авторы наибольшее внимание сосредоточили на том, чтобы сделать простой интерполяцию, а объем таблиц — возможно меньшим. Вся таблица содержит около 20000 различных табличных значений, хотя для

размещения этого материала и занято около 300 страниц. Однако удобство интерполяции достигнуто за счет некоторого увеличения вычислительной работы на других этапах расчета, что видно из приведенных примеров. Во введении рассматриваются критерии применимости интерполяции различного порядка. Табличный материал иллюстрирован большим количеством графиков. Правила пользования таблицами пояснены типовыми примерами. Ясная печать на хорошей бумаге делает таблицы приятными для пользования. Таблицы считались на малых вычислительных машинах в течение четырех лет. Книга является хорошим вычислительным пособием по эллиптическим функциям.

К. А. Карпов

4117 К. Пятизначные таблицы эллиптических функций, представленных посредством параметра Якоби q. Шулер, Гебелейн (Fünfstellige Tabellen zu den elliptischen Funktionen. Dargestellt mittels des Jacobischen Parameters q. Schuler M., Gebelein H., Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1955, 114 S.) (нем., англ.)

Пятизначные таблицы эллиптических функций предназначены для инженеров и физиков, применяющих в своих исследованиях эллиптические и тета-функции Якоби. За независимые переменные взяты параметр Якоби q и $z = \cos 2x = \cos \pi u / K$. В книге имеются:

I. Таблицы функций $\lg(\mathrm{sn}\, u / \sin x)$, $\lg(\mathrm{cn}\, u / \cos x)$ и $\lg \mathrm{dn}\, u$ с основным табличным входом по z со следующими характеристиками: $z = -1\,(0{,}1)\,1$; $q = 0{,}01\,(0{,}01)\,0{,}5$. Даны первые и в необходимых случаях вторые разности, а также соответствующие q значения модуля Лежандра θ.

II. Таблицы функций $\lg(\mathrm{sn}\, u / \sin x)$, $\lg(\mathrm{cn}\, u / \cos x)$ и $\lg \mathrm{dn}\, u$ с основным табличным входом по q, начальное значение которого равно нулю. Здесь же дана таблица, выражающая θ, $-\lg\cos\theta$, K и K/E в зависимости от q. В остальном эти таблицы совпадают с таблицами I.

III. Таблицы функций $\overline{G}(q, z) = \vartheta_1(x) / 2\sqrt[4]{q} \sin x$ и $\overline{H}(q, z) = \vartheta_3(x)$ с основным табличным входом по z и характеристиками: $z = -1\,(0{,}1)\,1$; $q = 0{,}01\,(0{,}01)\,0{,}5$. Приведены первые и в необходимых случаях вторые разности и соответствующие q значения θ.

IV. Таблицы функций $\overline{G}(q, z)$ и $\overline{H}(q, z)$ с входом по q, начальное значение которого равно 0. В остальном таблица IV совпадает с таблицей III.

V. Таблицы функций $1/(1-q)$, K, K/E и θ в зависимости от переменного $-\lg\cos\theta = -\lg k' = 0\,(0{,}01)\,2{,}5$ с первыми разностями. Через функции $\overline{G}$ и $\overline{H}$ вычисляются все четыре ϑ-функции. Во всех таблицах параметр q меняется до 0,5, что охватывает практически наиболее важную область его изменения.

VI. Вспомогательная таблица интерполяционных коэффициентов формулы Эверетта для вычисления промежуточных значений функций и первых производных.

Таблицы иллюстрированы большим числом графиков и типовых примеров. Ясная печать на хорошей бумаге делает таблицы приятными для пользования.

К. А. Карпов

4118 К. Введение в теорию погрешностей. Бирс (Introduction to the theory of error. Beers Yardley Addison-Wesley Publishing Co., Inc., Cambridge, Mass., VI + 65 p., 1.25 doll.) (англ.)

Эта сжатая по изложению и фактически небольшая книга была написана физиком и предназначена в основном для физиков, хотя она имеет ценность для каждого, кому требуется критически анализировать результаты наблюдений, проводимых с помощью приборов. Книга начинается с определения и пояснения используемых технических терминов. Далее начинается классификация и исследование погрешностей; рассматриваются экспериментальные ошибки в измеряемых величинах, отклонения, нормальное и среднее отклонения; приведены примеры. Нормальная кривая погрешностей получается сначала из соображений скорее эвристических, чем математических, но потом она выводится из основных предположений о погрешностях. Нормальное отклонение и среднее отклонение обосновываются для нормальной кривой. В следующей главе речь идет о распространении погрешности и о погрешностях функций многих переменных, с приложением к выбору приборов или техники. Далее следует глава о корректировании данных, где рассматриваются взвешенные средние, наименьшее квадратичное отклонение от прямой линии и их приложения. В следующей главе рассматриваются статистические погрешности ядерной физики и вводится биномиальное распределение. Книга заканчивается двумя примерами, которые анализируются подробно: опыт с закручивающимся маятником и градуировка весов Жолли.

W. E. Milne

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 6, 558.

4119 К. Введение в методы релаксации. Шоу (An introduction to relaxation methods. Shaw F. S., Dover Publications, Inc., New York, N. Y., 1953, 396 p., 5.50 doll.) (англ.)

Книга дает детальное описание решения методами релаксации совместных линейных уравнений и линейных дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных. Имеется обширная библиография (до конца 1949 г.). После краткого описания первоначальной работы Саусвелла (Southwell) в связи с фермами рассматривается решение совместных линейных уравнений. Дано полное объяснение метода, примененного к ряду уравнений, со всеми шагами в процессе решения и обсуждается точность, которая может быть получена. Подобным же образом рассматривается решение линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. Большая часть книги посвящена решению линейных дифференциальных уравнений в частных производных второго и четвертого порядков. Метод сначала описан детально в применении к решению уравнения Пуассона $\nabla^2\varphi = Z(x, y)$ с границами простой формы, а затем рассмотрены другие случаи: кривые границы, различные граничные условия, более сложные уравнения. Затем рассматривается решение задач о собственных значениях, и книга заканчивается описанием в общих чертах методов решения интегральных уравнений, свободных границ и улучшения точности путем использования метода Фокса (Fox, Proc. Roy. Soc. London, 1947, **A190**, 31—59). Включены таблицы коэффициентов, используемые при криволинейных границах.

D. C. Gilles

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 4, 353.

4120 К. Номография. Пентковский (Nomographie. Pentkowski M. W., Berlin, Akademie-Verlag, 1953, XV + 268 p., 15.00 DM) (нем.)

Перевод с русского издания (Номография, Гостехиздат, М.—Л., 1949).

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 10, 902.

4121 К. Номография и счетные линейки. Вальтер, Крон (Nomographie und Rechenschieber. Walther A., Kron A. W., Naturforschung und Medizin in Deutschland, 1939—1946, Band 3. Angewandte Mathematik, Teil I, S. 119—127. Verlag Chemie, Weinheim, 1953, 20.00 DM) (нем.)

Перевод из Math. Revs, 1954, 15, № 7, 652.

См. также: 3875, 3879 **К**, 3903, 3997

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

4122. Синтез многополюсников как главная задача кибернетики на основе метрической геометрии схем и исходные теоремы. Гонсалес-дель-Вальe (La síntesis de multipolos, problema capital en cibernética, por geometría métrica de las redes y teoremas previos. Gonzalez del Valle A.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1955, 4, № 10, 1—8 (исп.; рез. англ.)

По мнению автора, основные задачи кибернетики суть анализ и синтез электрических многополюсников как систем связи. Рассматривается синтез линейных многополюсников. Зависимости, связывающие сопротивления передачи между парами полюсов симметрической схемы, ставятся в соответствие с зависимостями, связывающими скалярные произведения сторон многогранника, и устанавливается эквивалентность операции закорачивания двух полюсов, операции проектирования многогранника в направлении, задаваемом двумя вершинами — образами полюсов, и операции исключения неизвестной в системе уравнений Кирхгофа. На основе этой «метрической геометрии схем» предлагается метод, сводящий синтез линейного многополюсника с заданными входными сопротивлениями и сопротивлениями передачи составляющих двухполюсников к синтезу двухполюсников с заданными проводимостями. Г. Н. Поваров

4123. Современные методы анализа линейных активных электрических цепей с особым учетом систем обратной связи. Ч. I. Анализ линейных активных цепей. Барабаски, Гатти (Moderni metodi di analisi delle reti elettriche lineari attive con particolare riguardo ai sistemi controreazionati. I.— Analisi di reti lineari attive. Barabaschi S., Gatti E.), Energia nucleare, 1954, 2, № 12, 105—119 (итал.; рез. англ.)

Излагается обобщенный метод узловых напряжений для анализа линейных активных цепей с сосредоточенными постоянными, в особенности цепей, содержащих электронные лампы и полупроводниковые триоды. Функции проводимости передачи вычисляются операциями над «неопределенной» матрицей Δ, которая описывает линейно зависимую систему уравнений Кирхгофа, составленных для всех узлов цепи. Рассматриваются эквивалентные схемы электронных ламп (диода и триода) и полупроводникового триода. Предлагаемый метод сравнивается с обычным методом узловых напряжений. Исследуется зависимость определителя матрицы Δ от параметра, входящего в один или несколько ее элементов, например от крутизны лампы. Рассматривается замена узловых напряжений их линейными комбинациями. Такая замена позволяет сделать зависимым от данного параметра только один элемент матрицы Δ. Особо исследуется случай индуктивных связей между ветвями цепи. Библ. 13 назв. Г. Н. Поваров

4124. Современные методы анализа линейных активных электрических цепей с особым учетом систем обратной связи. Ч. II. Теория обратной связи. Барабаски, Гатти (Moderni metodi di analisi delle reti elettriche lineari attive con particolare riguardo ai sistemi controreazionati. II.— Teoria della controreazione. Barabaschi S., Gatti E.), Energia nucleare, 1955, 2, № 13, 168—197 (итал.; рез. англ.)

На основе обобщенного метода узловых напряжений (см. реф. 4123) развивается с некоторыми обобщениями теория обратной связи Г. Боде (Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью, М., Изд-во ин. лит., 1948). Широко используются графы Мейсона (РЖМат, 1954, 4923), специально приспособленные к процедуре обобщенного метода узловых напряжений. Отмечается двойственная взаимосвязь полученных результатов с результатами метода контурных токов. Библ. 7 назв. Г. Н. Поваров

4125. Синтез многотактных релейных схем. Рогинский В. Н., Сб. науч. работ по проводной связи АН СССР, 1955, вып. 4, 111—127

Излагается методика синтеза многотактных релейно-контактных схем на основе учета неиспользуемых и безразличных состояний. В § 1 формулируется задача синтеза многотактных схем; в § 2 рассматривается методика составления таблиц включений и формулируются условия реализуемости таблицы включений; в § 3 вводится понятие общего решения синтезируемой цепи, содержащего в виде символической «дроби» алгебраические выражения для любых частных решений; в § 4 рассматривается синтез отдельных цепей схемы с учетом неиспользуемых и безразличных состояний, а в § 5 рассматривается объединение решений для отдельных цепей в решение для всей схемы и преобразование этого решения к простейшему виду. В приложении объясняется, как использовать таблицу соседних конституентов для такого упрощения общего решения (РЖМат, 1955, 2421). Г. Н. Поваров

4126. Символический метод для синтеза двухполюсных переключательных схем. Зехеб, Кейвуд (A symbolic method for synthesis of 2-terminal switching circuits. Zeheb D., Caywood W. P.), Commun. and Electronics (N. Y.), 1955, № 16, 690—693 (англ.)

Излагается метод синтеза контактных двухполюсников, состоящий из 7 шагов: 1) запись условий проводимости в виде булевой функции; 2) вынесение общих множителей; 3) вычерчивание дерева, изображающего разложение данной функции на конституенты единицы; 4) последовательное объединение одинаковых цепей с общим концом, начиная с контактов, присоединенных к полюсу, противоположному вершине дерева; 5) такой же синтез схемы для всех безразличных цепей (don't-care conditions); 6) сравнение схем, полученных на шагах 4) и 5), и упрощение схемы, полученной на шаге 4); 7) вычерчивание окончательной схемы. Шаг 2) необязателен. Шаги 5) и 6) нужны лишь при наличии неиспользуемых состояний. Сравнение на шаге 6) состоит в отыскании в схемах цепей, отличающихся только одним контактом; этот контакт выбрасывается из схемы, полученной на шаге 4). Приведен ряд примеров.

Примечание референта. Шаги 1)—4) и 7) в общем совпадают с методом каскадов, разработанным референтом (РЖМат, 1955, 4012), применен ным к двухполюсникам. Г. Н. Поваров

4127. Алгебра переключательных схем. Риг (L'Algebra dei circuiti di commutazione. Righ Rigo), Ingegneria ferroviaria, 1954, 9, № 1, 33—4 (итал.)

Объясняется применение булевой алгебры к анализу синтезу параллельно-последовательных контактны двухполюсников. Упоминается о возможности при менения булевой алгебры к системам переключения трубопроводов. Рассматриваются также неко торые варианты контактного мостика Уитстона и симметрические контактные двухполюсники. Высказывается мнение, что для разработки методов синтеза мостиковых схем будет полезна топологическая классификация типов мостиковых схем.

Роль русских ученых в развитии математическо логики и теории релейных схем значительно преумен

шена. Библ. 16 назв. по теории релейных схем и 4 по операционному исчислению. Г. Н. Поваров

4128. **Дальнейшее развитие переключательной алгебры: приложение ко многополюсным схемам. Р и г и** (Ulteriori sviluppi dell' algebra di commutazione: applicazione ai circuiti multiterminali. R i g h i R i g o), Ingegneria ferroviaria, 1954, **9**, № 4, 271—276 (итал.)

На основе предыдущей статьи (реф. 4127) рассматривается синтез контактных многополюсников с одним входом и n выходами. Ставится задача объединения цепей разных выходов. Рассказывается о разделительных контактных деревьях и о параллельных соединениях таких деревьев друг с другом и с неразделительными многополюсниками. Исследуется объединение цепей разных выходов в схемах с независимыми контактами и применение при этом вентильных элементов. Г. Н. Поваров

4129. **Многотактные схемы и их анализ. Р и г и** (I circuiti sequenziali e la loro analisi. R i g h i R i g o), Ingegneria ferroviaria, 1954, **9**, № 11, 847—856 (итал.)

Рассказывается о многотактных релейно-контактных схемах и о методике их анализа, описанной Хафманом (РЖМат, 1955, 3444) и Греа и Игонне (РЖМат, 1956, 787). Упоминается книга М. А. Гаврилова (Relaisschaltungstechnik, V. E. B. Verlag Technik, 1953). Г. Н. Поваров

4130. **Многотактные схемы и их анализ. Р и г и** (I circuiti sequenziali e la loro analisi. R i g h i R i g o), Ingegneria ferroviaria, 1954, **9**, № 12, 957—966 (итал.)

Продолжение статьи, начало см. 4129. Излагается метод анализа многотактных релейно-контактных схем с помощью разрывных функций времени: единичной ступенчатой функции $1(t-\alpha)$, ее инверсии $0(t-\alpha)$ и импульсных функций $I^{\alpha_2}_{\alpha_1}(t) = 1(t-\alpha_1)\cdot 0(t-\alpha_2)$, $I'^{\alpha_2}_{\alpha_1}(t) = 0(t-\alpha_1) + 1(t-\alpha_2)$. Сложение понимается в булевом смысле. Выводится ряд соотношений между такими функциями, например $I^{\alpha_4}_{\alpha_3}(t) = I^{\alpha_3}_{\alpha_1}(t)\cdot I'^{\alpha_3}_{\alpha_1}(t) + I^{\alpha_4}_{\alpha_3}(t)$, где $\alpha_1 < \alpha_2 < \alpha_3 < \alpha_4$. Каждой обмотке и каждому контакту схемы приписывается своя разрывная функция времени, изображающая изменения их состояния и составленная из участков типа $1(t-\alpha)$, $0(t-\alpha)$, $I^{\alpha_2}_{\alpha_1}(t)$. Подбором постоянных α_r, α_1, α_2 учитываются времена срабатывания и отпускания реле, перелета контактов и т. п. Контакты приемных элементов называются первичными, прочие контакты — вторичными. Составив алгебраическую формулу цепей схемы, заменяют в ней первичные контакты последовательными участками заданных функций времени, а вторичные и обмотки — участками искомых функций с неопределенными постоянными, беря попеременно участки типов $1(t-\alpha)$ и $0(t-\alpha)$ и учитывая время срабатывания и отпускания реле. Полученные уравнения решают относительно неопределенных постоянных и тем самым вычисляют моменты изменения состояний реле и вторичных контактов. Неразрешимость уравнений означает отсутствие изменения. Угадывание вида более длинных участков искомых функций (например, участков вида $I^{\alpha_2}_{\alpha_1}(t)$) ускоряет и облегчает анализ. Приведен ряд примеров анализа. Г. Н. Поваров

4131. **Импульсная телеграфия в нервах. Сигнальная система живых существ. З е м а н е к** (Impulstelegraphie in den Nerven. Das Nachrichtennetz im Lebewesen. Z e m a n e k H e i n z v o n), Radiotechnik, 1953, **29**, № 4, 139—142 (нем.)

Статья принадлежит к циклу, посвященному популяризации «теории информации», т. е. теории передачи сигналов в ее различных аспектах. В популярной форме излагаются некоторые результаты опубликованных ранее в американских журналах работ, касающихся механизма передачи сигналов в нервной системе. На основании этих работ утверждается, что механизм передачи сигналов в нервной системе аналогичен импульсной телеграфии (передача сигналов методом модуляции частоты следования импульсов). Нейроны рассматриваются как аналоги триггерных ячеек, т. е. мультивибраторов, имеющих два устойчивых состояния. Основной вывод, к которому приходит автор, заключается в том, что исследования в области изучения электрических процессов при передаче нервных возбуждений и в области создания наиболее эффективной техники сигнализации идут в одном и том же направлении и поэтому могут взаимно обогащать друг друга. Признавая недостаточность электрических методов исследования передачи возбуждений в нервной системе, автор придерживается формы изложения, обычной для кибернетики. В. И. Шестаков

См. также: 3841, 3844, 3845

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МАШИНЫ И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРИБОРЫ

4132. **Использование рефлексного кода в цифровых управляющих системах. Ф о с с** (The use of a reflected code in digital control systems. F o s s F. A.), Trans. I. R. E., 1954, **EC-3**, № 4, 1—6 (англ.)

Одной из важных особенностей рефлексного кода является его свойство изменять состояние только одного разряда при изменении эквивалентного ему десятичного числа на единицу младшего разряда. Это особенно рекомендует его к применению в цепях обратной связи цифровых управляющих систем, в которых в некоторых случаях применение простого двоичного кода, ввиду сложности механической регулировки одновременного замыкания или размыкания контактов реле в нескольких разрядах, может привести к эффекту рыскания и неустойчивой работе системы.

Описываются устройства, в которых появляется необходимость при образовании цепи обратной связи таких управляющих систем: устройство перевода рефлексного кода в простой двоичный, устройство преобразования рефлексного кода в непрерывное напряжение, устройства сравнения рефлексных и простых двоичных кодов. Приведена блок-схема цифрового аккумулятора, выполняющего суммирование слагаемого в простой двоичной форме, хранящегося в аккумуляторе, и величин в рефлексном коде, которые являются функциями угла поворота вала.

Применение рефлексного кода для получения желаемых рабочих характеристик в некоторых управляющих системах может привести к некоторому упрощению схем. В. И. Смирнов

4133. **Электронные цифровые вычислительные машины** (Electronic digital computers,) Engineer, 1955, **199**, № 5171, 303—304 (англ.)

Третья из серии статей об английских вычислительных машинах. Коротко описывается вычислительная машина фирмы «Ферранти» Марк I, установленная в 1951 г. в Манчестерском университете (РЖМат,

1955, 3451, 4755). Новых сведений по машине не сообщается.

Описана более поздняя разработка фирмы «Ферранти» — машина «Пегас» (Pegasus) (РЖМат, 1956, 1713). «Пегас» — средняя, универсальная, одноадресная, последовательная машина с запоминающим устройством на никелевых линиях задержки. Внешнее запоминающее устройство состоит из магнитного барабана на 4608 чисел, вращающегося со скоростью 3750 об/мин. Ввод и вывод данных обеспечивается фототрансмиттером и телетайпом. Предусмотрен ввод и вывод данных с перфокарт и магнитной ленты, а также быстрая печать. Скорость ввода с перфоленты 200 знаков в 1 сек., скорость печати 6—7 знаков в 1 сек. Машина размещена в двух шкафах размерами 2,3 × 0,6 × × 2,1 *м* и 1,6 × 0,6 × 2,1 *м*. Один код машины имеет 39 двоичных разрядов и содержит две одноадресные инструкции. Рабочая частота машины 330 *кгц*. Умножение выполняется в течение 2 мсек., деление — 5 мсек, самая короткая операция — 0,3 мсек. Л. С. Легезо

4134. Новая модель машины УНИВАК (New Univacs), Tele-Tech, 1955, **14**, № 7, 18 (англ.)

Сообщение фирмы «Ремингтон Ранд» о выпуске новой машины УНИВАК-Сайнтифик (Univac-Scientific). Машина может работать со вспомогательным оборудованием машины УНИВАК. Печатающее устройство машины может печатать выходные данные со скоростью 600 строк в 1 мин. на любом формате. Емкость оперативного запоминающего устройства на магнитных сердечниках 4096 чисел, емкость промежуточного запоминающего устройства на магнитном барабане 16 384 числа. Л. В. Кутуков

4135. Институт установил электронную вычислительную машину для ускорения расчетов и применения в новых областях вычислений (Institute installs «electronic brain» to expedite rou), News Letter Inst. Gas Technol., 1955, **7**, № 6, 2—3 (англ.)

Сообщается, что Технологический газовый институт установил малую вычислительную машину фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research) АЛЬВАК III (ALWAC III). Машина имеет запоминающее устройство на магнитном барабане, имеющем диаметр 18 *см*, длину 36 *см* и вращающемся вокруг вертикальной оси. Вдоль барабана расположено 128 магнитных головок. На барабане хранится 4096 десятиразрядных десятичных чисел. Скорость вращения барабана 3600 об/мин. Машина выполняет 60 делений или умножений и от 100 до 1000 сложений или вычитаний в 1 сек. Данные вводятся либо с перфоленты через телеграфный трансмиттер, либо с клавишного ввода. Результаты вычислений либо печатаются на телетайпе, либо набиваются на перфоленту. В машине насчитывается 280 ламп и 5000 диодов. Потребляемая мощность 6 *квт*. Машина размещена в одном шкафу, имеющем 3 *м* в длину, 0,7 *м* в глубину и 1,6 *м* в высоту. Машина будет использоваться для анализа данных масс-спектрометров, расчетов, связанных с анализом температуры пламени, термодинамических свойств газов, свойств различных газовых смесей и для расчетов газовых систем.

Л. С. Легезо

4136. ФЕРУТ — канадская электронная вычислительная машина. Мак-Доналд (Ferut, Canada's electronic computing machine. McDonald Jean K.), J. Roy. Astron. Soc. Canada, 1954, **48**, № 5, 176—184 (англ.)

После исторического обзора развития вычислительной техники сообщается, что универсальная электронная вычислительная машина ФЕРУТ (Ferut) была построена фирмой «Ферранти» (Ferranti) и установлена в 1951 г. в университете в Торонто.

ФЕРУТ является последовательной, двоичной машиной и имеет 40 двоичных разрядов. Внутреннее запоминающее устройство на 9 обыкновенных электростатических трубках может хранить 256 40-разрядных двоичных чисел. Внешнее запоминающее устройство на магнитном барабане может хранить 16 384 числа. На барабане, покрытом никелем, расположено 256 дорожек, на каждой из которых хранится по 512 чисел. Содержимое внутреннего запоминающего устройства передается на барабан за $^1/_{12}$ сек. Машина имеет фотоэлектрический ввод с пятидырочной перфоленты и вывод на перфоленту. Сложение выполняется за 1 мсек, умножение за 2 мсек. Описывается ряд задач, которые может решать машина. См. также РЖМат, 1955, 3456.

Л. С. Легезо

4137. Цифровая вычислительная машина (Digital computer), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 6, 626 (англ.)

Сообщение фирмы «Белл» (Bell Telephone Laboratories) о разработке цифровой вычислительной машины ТРАДИК (TRADIC) (РЖМат, 1954, 5807, 5808), спроектированной целиком на полупроводниковых триодах и предназначенной для применения в авиации. Машина имеет 800 триодов и 11 000 германиевых диодов. Предполагается, что ТРАДИК будет занимать объем 81 $дм^3$. Задание программы осуществляется с коммутационной панели. В. В. Карибский

4138. Вычислительная машина ТРАДИК (TRADIC shoots trouble), Bell Telephone Laboratories Arde Canad. Aviat., 1955, **28**, № 6, 88 (англ.)

Сообщение о машине ТРАДИК, разработанной фирмой «Белл» (реф. 4137). Машина предназначена для авиации и заменит употребляемое до сего времени моделирующее устройство, занимающее значительно большую площадь. Задача, которую будет решать машина, требует выполнения 250 отдельных этапов вычислений, на что требуется 0,015 сек. В запоминающем устройстве может сохраняться одновременно тринадцать 16-разрядных чисел. А. Б. Залкинд

4139. Миниатюрная вычислительная машина (A miniature electronic brain), J. Franklin Inst., 1955, **259**, № 5, 473—474 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине ТРАДИК (реф. 4137, 4138). Машина предназначена для обслуживания сверхзвуковых самолетов. Программа вычислений коммутируется на съемных панелях. Константы задаются с помощью ключей. А. Б. Залкинд

4140. Новая цифровая вычислительная машина ДЭЮКЕ (DEUCE. A new digital computor), Electronic Engng, 1955, **27**, № 326, 179 (англ.)

Описывается электронная вычислительная машина фирмы «Инглиш Электрик» (English Electric Co.) ДЭЮКЕ (DEUCE; РЖМат, 1955, 4740). Отмечается, что ввод данных в машину возможен в любой системе с последующим переводом в двоичную на машине. Первые экземпляры машины будут установлены в вычислительных центрах исследовательской лаборатории Нельсона фирмы «Инглиш Электрик» в Стаффорде.

Л. С. Легезо

4141. Электронная вычислительная машина (Electronic computer), Power Equipm., 1954, **6**, № 2, 26 (англ.)

Сообщение фирмы «Лоджистикс Рисёрч» (Logistics Research) о выпускаемой ею в продажу электронной вычислительной машине. Запоминающее устройство сделано на магнитном барабане емкостью 2048 чисел. Результаты вычислений печатаются телетайпом. Данные вводятся в машину в десятичной системе с перфоленты. Стоимость машины 48 000 долл. Отмечается, что разработка машины обошлась фирме в 1 млн. долл. В. Б.

Примечание редакции. Не сообщается тип машины, но судя по приведенным данным речь идет о машине АЛЬВАК.

4142. Электронная вычислительная машина (Electronic computer), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 6, 908—910 (англ.)

Сообщение фирмы «Бендикс» (Bendix Computer) о выпуске новой универсальной цифровой двухадресной вычислительной машины С-15 (С-15 General Purpose Digital Electronic Computer). Ввод и вывод данных обеспечиваются телетайпом, фототрансмиттером и перфоратором. В качестве вспомогательного запоминающего устройства используется магнитная лента.

Д. Абдуллаев

4143. Последние усовершенствования вычислительной машины УНИВАК фирмы «Ремингтон Ранд». Харр (Ultimos perfeccionamientos de los sistemas de cálculo automático UNIVAC de la Remington Rand. Harr Luther A.), Rev. cálculo automát. y cibernét., 1955, 4, № 10, 27—34 (исп.)

Описываются усовершенствования вычислительной машины УНИВАК с 1951 г. Создано устройство «Юнитайпер II» для записи данных на магнитную ленту с клавиатуры с одновременным получением контрольной печатной копии. «Юнитайпер II» меньше в 6 раз и дешевле в 4 раза прежней модели «Юнитайпер I» (РЖМат, 1955, 4069) и производится фабрикой «Эльмира» (Elmira) в Нью-Йорке. Вместо печатного устройства «Юнипринтер» (РЖМат, 1955, 4071) создано быстродействующее печатное устройство, печатающее с магнитной ленты по 600 строк в 1 мин., т. е. в 130 раз быстрее, чем «Юнипринтер». Создан также преобразователь данных с перфокарт на магнитную ленту (РЖМат, 1955, 4068) и преобразователь данных с магнитной ленты на перфокарты. Оба преобразователя снабжены автоматическим контролем. Эти новые устройства делают возможным широкое применение машин УНИВАК для учетно-плановых работ в торговле и промышленности, а также в области снабжения авиации. Машина, оставаясь в общем без изменений, подверглась 5700 частичным переделкам. Была введена система контроля путем изменения режимов, авторегулирование режима чтения магнитной ленты, водяное охлаждение. Вместо 51 операции теперь имеется 63. При испытаниях усовершенствованной машины УНИВАК в страховой компании преобразователь данных с перфокарт на магнитную ленту пропускал в среднем 8112 карт в 1 час, а обратный преобразователь 4744; центральные устройства эффективно работали 81% времени; за 15 час. 54 мин. (включая два часа простоя) отпечатано 347 000 строк. Отмечается, что 30% оборудования машины работает на контроль. В октябре 1954 г. работало 13 машин УНИВАК: 8 в военных организациях, 4 в коммерческих предприятиях и одна в общественном учреждении Нью-Йорка. Фирма «Ремингтон Ранд» имеет три организации, работающие над усовершенствованием вычислительных машин: Высшую научно-исследовательскую лабораторию в Норуолке (Norwalk, Коннектикут), отделение «Эккерт-Мочли» в Филадельфии и Ассоциацию инженеров-исследователей в С. Поле (S. Paul, Миннесота). Вместе они насчитывают 2500 инженеров, техников и ученых. На курсах фирмы обучается 400 слушателей. В 1955 г. будет налажен выпуск контрольника для проверки правильности записи на магнитной ленте и преобразователя данных с перфоленты на магнитную ленту.

Г. Н. Поваров

4144. Эксплуатация вычислительной машины УНИВАК в Военно-воздушных силах. Копп (Experience on the Air Force UNIVAC. Kopp Robert), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 62—67 (англ.)

Рассматривается вопрос надежности вычислительных машин на примере эксплуатации машины УНИВАК в течение первых 18 месяцев в Пентагоне. УНИВАК работает с момента установки по 24 часа в сутки, по семь дней в неделю. Персонал состоит из 11 человек.

Максимальное число неисправностей относится к лампам. За рассматриваемый срок вышло из строя 2100 ламп и, кроме того, 1300 ламп были забракованы при предварительных испытаниях. Распространенной причиной выхода ламп из строя было появление утечки от 10 до 400 *ком* между экранной сеткой и катодом. За рассматриваемый период работы УНИВАК время на вычисления и наладку программ составило 61%; профилактические работы 20%, простой машины из-за неисправностей 19%. В лучший месяц работы полезное время составило 74%, в худший месяц — 49%.

А. Б. Залкинд

4145. Рабочие испытания ИБМ-701 в Лос-Аламосе. Бурициус (Operating experience with the Los Alamos 701. Bouricius Willard G.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 45—47 (англ.)

Рассматривается организация работ на машине ИБМ-701, установленной в апреле 1953 г. в Лаборатории Лос Аламос (Los Alamos), занимающейся атомными исследованиями. Вычислительный отдел при теоретической группе этой лаборатории в настоящее время использует 6 перфокартных вычислителей фирмы ИБМ (типа КПК), электронные вычислительные машины МАНИАК (MANIAC) и ИБМ-701. Ожидается установка в ближайшее время второй машины ИБМ-701. Эксплуатация ИБМ-701 ведется по принципу самообслуживания, т. е. сотрудники теоретического отдела, формулируя задачу, сами составляют для нее программу, занимаются кодированием и решают задачу на машине. Для этого они должны быть знакомы с работой оператора. Такая система помогает теоретикам использовать все возможности, даваемые машиной, и весьма быстро получать искомые результаты. За первые семь месяцев эксплуатации ИБМ-701 полезное время вычислений составляло 63—84% в месяц.

В Лос-Аламосе на ИБМ-701 широко применяется специальная система кодирования, разработанная Отделом прикладных наук фирмы ИБМ, известная под названием «местного кодирования» (regional coding). При использовании этой системы каждый адрес определяется установленной комбинацией из двух десятичных разрядов и буквы. В процессе объединения отдельных подпрограмм этот местный код переносится на специальные адреса запоминающего устройства. Крупные задачи разбиваются на ряд отдельных блоков. Каждый блок программируется отдельно и затем ИБМ-701 самостоятельно объединяет их в общую программу.

А. Б. Залкинд

4146. СЕАК. Обзор трехлетней работы. Шуп, Керш (SEAC — Review of three years of operation, Shupe P. D., Kirsch R. A.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 83—90 (англ.)

С сентября 1950 г. Национальное бюро стандартов США эксплуатирует машину СЕАК. Работа на машине ведется по 24 часа в сутки, семь дней в неделю. Первоначально это время почти поровну распределялось между вычислительными работами и работами по наладке и усовершенствованию машины. Последнее время для наладки и технического обслуживания отводятся всего 4 смены в неделю, по 8 час. каждая. Штат, подготавливающий задачи, состоит из 30—40 математиков, штат технического обслуживания СЕАК — из 3 инженеров и 5 техников. Один техник все время занят конструированием и ремонтом заменяемых субблоков. Во время работы машины возле нее находятся один техник и инженер.

Для обнаружения причины неисправности используются контрольные программы. Это возможно лишь тогда, когда есть полная уверенность, что блоки управления СЕАК работают надежно. Отдельные программы контролируют запоминающее устройство (отдельно акустическое и электростатическое), арифметический узел, магнитные ленты, магнитную проволоку. Другая группа программ вызывает определенные серии импульсов в известных точках машины, что позволяет осциллографически проверять работу сомнительных узлов. Кроме указанных методов обнаружения причин неисправности, в машине используется метод профилактического контроля. Изменяя 2 напряжения в СЕАК, можно изменять одновременно величину всех импульсов в машине. В течение двух первых лет СЕАК не имел встроенных устройств для контроля. В последнее время было создано устройство контроля акустического запоминающего устройства, которое давало наибольшее число сбоев.

В настоящее время рассматривается вопрос о создании встроенного контроля для электростатического запоминающего устройства и устройств ввода и вывода.

В СЕАК используется 1424 электронные лампы 32 различных типов. В основном это лампы типа 6AN5 (1050 шт.). За первые 3 года эксплуатации в СЕАК было заменено 1300 6AN5, главным образом во время профилактики. Во время вычислений за 15 месяцев работы в СЕАК пришлось заменить лишь 18 ламп. Отмечается увеличение чувствительности ламп к подогреву с ростом времени их службы. Средний срок службы ламп определяется в 10 000—12 000 час. при учете роста чувствительности к подогреву—8700 час. В машине использовались сопротивления с 10%-ным допуском. За время работы машины 1% общего числа сопротивлений изменил свои параметры сверх допустимых 10%. Такие сопротивления заменялись по мере их обнаружения. Среднее время полезной работы за 3 года составило 74%. А. Б. Залкинд

4147. Обзор рабочих испытаний машины ОРДВАК. Вильямс (Review of ORDVAC operating experience. Williams Charles R.), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 91—95 (англ.)

ОРДВАК — одна из трех электронных цифровых вычислительных машин, эксплуатируемых в Баллистической исследовательской лаборатории в Абердине. Машина была установлена в лаборатории в марте 1952 г. За время с 10 марта 1952 г. по 2 октября 1953 г. ОРДВАК использовался 8410 час. для вычислений. Время технического обслуживания составило 4189 час. В оставшиеся 1104 часа машина не использовалась. В среднем время за неделю распределялось следующим образом: 37,17 часа — наладка программ; 38,29 часа — вычисления и 23,03 часа — не использовалась. В качестве контрольной программы главным образом использовалась программа «Прыжок III» (Leap III). За 546 час. контроля посредством программы «Прыжок III» было отмечено 141 неисправность по вине запоминающего устройства и 31 — по вине арифметического узла. Среднее время между обнаружением ошибок было 3,2 часа. Менялось это время от нескольких минут до 24 час.

Каждый рабочий день на машине ОРДВАК состоит из технического обслуживания с 8 до 10 час. Затем проводится решение контрольных задач, и если все оказывается в порядке, то начинаются вычисления. Оператор не знаком с программой решаемой задачи. Он пользуется в своей работе лишь инструкцией, составленной для него программистом. В среднем за неделю на ОРДВАК решается до 30 различных задач. 40% полезного времени идет на работу по вычислению таблиц бомбометания и траекторий для ракет и управляемых снарядов.

Входные устройства ОРДВАК при его установке имели скорость, позволяющую полностью заполнить запоминающее устройство за 38 мин. Введенное теперь усовершенствование позволяет делать это за 7,5 мин. Иллинойский университет посылает свои программы в закодированном виде по телеграфу в Абердин. Там проверяется правильность их приема и они используются для ввода в машину. Результаты, набитые на перфоленту, передаются в Иллинойс. Таким образом, ОРДВАК доступен для любой лаборатории США, имеющей штат кодировщиков.

Электростатическое запоминающее устройство проверяется методом многократного считывания информации с одной точки и проверки сохранения при этом информации на соседней точке. Вначале коэффициент повторных обращений составлял 10—16. В мае 1953 г. запоминающее устройство было переведено на систему использования 3 точек. После применения новых ламп, разработанных RCA, была получена надежная работа при 70—100 повторных считываниях.

За время работы машины ОРДВАК (18 000 час.) все его 3000 ламп были заменены по крайней мере уже один раз. Очень неприятным явлением при эксплуатации машины оказалась пыль, попадающая из вентиляционной установки и осаждающаяся на проводах электростатического запоминающего устройства. Пробои при включении высокого напряжения, связанные с осаждением пыли, вызывают случайные и трудно обнаруживаемые сбои в работе машины. А. Б. Залкинд

4148. Вычислительные машины в 1956 году (The computer in 1956), Brit. Communs and Electronics, 1956, **3**, № 1, 36 (англ.)

По сообщению американского корреспондента журнала «Бритиш Коммьюникейшнз энд Электроникс» в 1956 г. в США ожидается большое расширение производства электронных вычислительных машин. Фирма ИБМ имеет, например, заказы на 200 больших вычислительных машин. 30 из них уже установлены, остальные будут поставлены в течение 16 месяцев. Указывается, что общая сумма капиталовложений в действующие и уже заказанные вычислительные машины, вероятно, достигнет цифры около 1 миллиарда долларов.

Отдельные крупные фирмы имеют сейчас уже большие парки вычислительных машин. Так, фирма «Дженерал Электрик» имеет 23 машины, из которых 6 больших. Фирма «Ремингтон Ранд» предполагает выпустить в продажу летом 1956 г. машину УНИВАК II, обладающую вдвое большей скоростью, чем прежняя модель УНИВАК. Эта же фирма работает над гигантской машиной ЛАРК (LARC) стоимостью в 3 миллиона долларов, которая должна иметь скорость в 250 раз больше, чем существующие машины.

Указывается, что в течение ближайших 5 лет количество людей, занимающихся вычислительными машинами, должно примерно удваиваться каждый год. Поскольку сейчас в США имеется около 100000 инженеров и техников, занятых в этой области, можно ожидать, что через 5 лет их потребуется около 3 миллионов человек. Подготовка такого количества специалистов представляет большие трудности, и их несомненно будет недостаточно. Особенно острой является нехватка специалистов высокой квалификации, и фирмы ревниво оберегают этих специалистов от попыток конкурентов привлечь их к решению своих задач. Д. Ю. Панов

4149. Иллюстрации возможных применений вычислительных машин (Illustrations of computer powers), Computers and Automat., 1954, **3**, № 7, 26, 28 (англ.)

Приводятся примеры использования трех электронных вычислительных машин вычислительного центра «Уиллоу Ран» при Мичиганском университете.

МИДЗАК (MIDSAC — Michigan Digital Special Automatic Computer) — специальная цифровая вычислительная машина, спроектированная для управления режимами сложных систем или объектов в реальном масштабе времени. МИДЗАК выполняет сложение за 40 μсек., а умножение за 88 μсек.

Моделирующее устройство центра является одной из крупнейших установок в США. Оно содержит 364 операционных усилителя, 18 сервоперемножателей, 25 синусных трансформаторов, 12 вычерчивающих установок и 18 каналов для осциллографической записи результатов. Используя эту машину, можно моделировать движение танка, решая соответствующие динамические уравнения. Получаемые результаты дают полное представление о движении шести его колес и корпуса с учетом качки из-за рельефа.

МИДАК (MIDAC — Michigan Digital Automatic Computer) — универсальная цифровая вычислительная машина последовательного типа, работающая на частоте 1 *Мгц*. Внутреннее запоминающее устройство состоит из 64 ртутных линий задержки, хранящих каждая по 8 кодов из 45 двоичных разрядов. Полная емкость запоминающего устройства 512 кодов. Запоминающее устройство на магнитном барабане хранит 6144 кода. Для ввода информации используется фототрансмиттер фирмы «Ферранти». Типовыми задачами для МИДАК являются: решение дифференциальных уравнений затухающих колебаний типа $mx'' + cx' + kx = 0$; решение матрицы 10×10 методом итераций, которое занимает всего 20 сек.; разложение произвольных целых чисел на простейшие сомножители.

А. Б. Залкинд

4150. Механический перевод. Бут (Mechanical translation. Booth Andrew D.), Computers and Automat., 1953, **2**, № 4, 6—8 (англ.)

Приводятся некоторые соображения относительно принципов построения устройства для механического перевода текста с одного языка на другой. Такое устройство может быть выполнено подобно современным вычислительным устройствам, но с большим объемом запоминающего устройства.

При двоичной кодировке каждой буквы алфавита потребовался бы очень большой объем запоминающего устройства. Например, для перевода слов, состоящих всего лишь из двух букв, требуется 1024 ячейки в запоминающем устройстве. При переводе слов, имеющих в своем составе до 10 букв, необходимо 2^{50} ячеек. Применение подобного метода нерационально, так как любой из известных сейчас языков содержит гораздо меньшее количество слов, чем 2^{50}. Для механического перевода можно использовать другой принцип. Каждое переводимое слово можно представить состоящим из основы (корня) и окончания. Вначале будет находиться буквенное сочетание, эквивалентное по смыслу буквенному сочетанию переводимого корня, а затем окончанию. Затем будут добавлены необходимые знаки препинания. В запоминающем устройстве при этом должны будут запасаться только буквенные сочетания, имеющие определенный смысл, буквенные сочетания, соответствующие окончаниям слов и относительно небольшое число специальных терминов с корнем из другого языка. Приведены конкретные примеры последовательности операций при переводе слов. Экспериментальные работы по механическому переводу текста были проведены на вычислительной машине APEXC в Биркбекском колледже.

В. Б.

4151. Вычислительная машина, предсказывающая погоду («Brain» tells weather), Sci. News Letter, 1955, **67**, № 17, 269 (англ.)

Сообщается, что Принстонский университет использует быстродействующую вычислительную машину для предсказания погоды. По математической модели доктора Филипса, учитывающей только тепло, получаемое на экваторе от солнца, и трение воздушных потоков, на этой машине рассчитывается прогноз погоды на большой площади на 30 дней вперед. Предсказание погоды на две недели требует 15 час. машинного времени. При улучшении математической модели и при учете влажности воздуха, влияния гор, океанов и сезонных изменений солнечной радиации считается возможным предсказание погоды на год или больше вперед. Существующая модель позволяет вести предсказание на площади, шириной в 6000 миль, расположенной вдоль экватора.

О. К. Щербаков

4152. Вычислительные машины и предсказание погоды. Гилкрист (Computers and weather prediction. Gilchrist Bruce), Computers and Automat., 1955, 4, № 3, 8—9 (англ.)

Рассматривается проблема численного способа предсказания погоды. С помощью современных машин делаются попытки предсказания погоды на сравнительно небольших площадях и малых расстояниях по вертикали. С целью показать сложность задачи предсказания погоды на больших пространствах, автор рассматривает задачу предсказания погоды за сутки на всем северном полушарии. Для решения такой задачи, без учета некоторых факторов, потребуется машина с запоминающим устройством емкостью 112000 чисел и временем выполнения операции умножения около 30 μсек. Существующие машины имеют запоминающие устройства значительно меньшей емкости и производят умножение почти в десять раз медленнее. Имеются указания на организации, занимающиеся вопросами предсказания погоды с помощью вычислительных машин в США, Англии и Швеции, и на машины, используемые для этой цели. В примечании к статье сообщается о том, что получены сведения о создании вычислительной машины НОРК (NORC), обладающей параметрами, близкими к тем, какие требуются для решения проблемы предсказания погоды.

Б. И. Шитиков

4153. Результаты прогнозов давления на среднем уровне атмосферы, выполненных с помощью электронной вычислительной машины БЭСК (Results of forecasting with the barotropic model on an electronic computer (BESK)), Tellus, 1954, **6**, № 2, 139—149 (англ.)

Приводятся некоторые результаты по 24 прогнозам геопотенциала поверхности 500 *мб* на сутки вперед, полученных путем численного интегрирования нелинейного уравнения вихря скорости геострофического ветра на среднем уровне атмосферы. Изложена математическая схема решения указанного уравнения.

Вычисления произведены на быстродействующей вычислительной машине БЭСК. На всю работу, необходимую для составления одного прогноза (от наноски на карту исходных данных до анализа прогностической карты), требуется 6,5 час., из них вычисление на машине занимает 40 мин. Предлагаются некоторые приемы, которые могли бы несколько сократить это время и исключить субъективные ошибки.

С. Л. Белоусов

4154. Обзор способов техники предупреждения повреждений. Манси (A survey of electronic failure prediction technique. Muncy J. H.), Convent. Rec. I. R. E., 1954, **11**, 9—12 (англ.)

Рассматриваются общие принципы техники проверки надежности работы сложных электронных устройств. Указывается, что правильная оценка различных методов проверки надежности аппаратуры имеет весьма важное значение для конструирования военной аппаратуры. Кратко описаны результаты работ по про-

филактике повреждений, проведенных на машинах ИРА-1101, УНИВАК, СЕАК, ИАС и в Вычислительном центре Управления связи в Пентагоне. Л. В. Кутуков

4155. Быстродействующая электронная вычислительная машина построена для Военно-морского артиллерийского бюро (High-speed electronic computer built for Navy's Bureau of Ordnance), Electr. Engng, 1955, **74**, № 1, 87 (англ.)

Сообщение о вычислительной машине НОРК (NORC) фирмы ИБМ, выполняющей 15 000 сложных арифметических операций в 1 сек. (РЖМат. 1955, 3459, 6146). Л. С. Легезо

4156. Новая электронная вычислительная машина (New electronic brain), Ordnance, 1955, **39**, № 209, 826—827 (англ.)

Приводятся некоторые данные об электронной вычислительной машине НОРК. См. РЖМат, 1955, 3459, 6146.

4157. Вычислительная машина фирмы ИБМ для морского полигона в Дальгрене (IBM's push-button brain for BuOrd), Naval Aviat. News, 1955, February, 35 (англ.)

Краткое сообщение о том, что на морском полигоне в Дальгрене будет вскоре установлена машина НОРК. Приводятся технические данные машины НОРК (РЖМат, 1955, 3459—3461, 6146). А. Б. Залкинд

4158. Электронная конторская машина за работой (The electronic office at work), Automat. Age, 1955, **1**, № 1, 4 (англ.)

Кратко описывается конторская вычислительная машина ЛЕО (LEO) (РЖМат, 1955, 1514—1518, 3451, 4739). Д. Ф. Шапошников

4159. Сокращение габаритов вычислительных машин. Нис (Computers are shrinking. Neese Jerry), Iowa Engr, 1954, **55**, № 2, 20 (англ.)

Приводятся сравнительные данные вычислительной машины фирмы ИБМ на полупроводниковых триодах и машины ИБМ-604. В. М. Тарасевич

4160. Как коммерческие круги используют большую вычислительную машину ИБМ-701 для обработки данных (How business uses IBM's great electronic «701» for data processing), Tech Engng News, 1954, **35**, № 6, 54 (англ.)

Сообщается, что полезное время работы вычислительной машины ИБМ-701, установленной в главной конторе фирмы, составляет от 16 до 24 час. в сутки.

4161. Электронная вычислительная машина. Репосси (La calcolatrice elettronica. Repossi Giordano), Corriere militare, 1955, **11**, № 9—10, 10 (итал.)

Сообщается об установке электронной вычислительной машины в Национальном институте прикладных вычислений (Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo) в Риме и кратко рассказывается о возможных ее применениях в разных областях. Технические данные машины не приведены. Г. Н. Поваров

4162. Быстродействующие вычислительные машины. Томас (High speed computers. Thomas B. W.), ISA Journal, 1955, **2**, № 3, 73—76 (англ.)

Популярная статья о вычислительных машинах. Упоминается о ряде применений вычислительных машин. Сообщается, что в Пенсильванском университете для структурного анализа взрывчатого вещества используется машина X-ray. В машине на экране осциллографа сразу получается атомная решетка вещества. Д. Ф. Шапошников

4163. Моделирующее устройство на 30 усилителей (Analog computer features 30 amplifiers), Electronics, 1955, **28**, № 1, 270—271 (англ.)

Сообщение фирмы «Мид Сенчури Инструмэтик» (Mid-Sentury Instrumatic) о выпуске нового моделирующего устройства МС-500. Указывается, что в устройстве обеспечивается точность 0,1% при изменении напряжения от —100 до +100 *в*. Задание программы вычислений выполняется на съемных панелях. Д. А. Абдуллаев

4164. Миниатюрное моделирующее устройство. Джонсон (A miniature analogue computer. Johnson A. B.), Brit. Communs and Electronics, 1955, **2**, № 8, 69 (англ.)

Описывается электронное моделирующее устройство «Miniputer», позволяющее решать линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами до 10-го порядка. Вычислительный блок размером $28 \times 40 \times 50$ *см* включает в себя 103-ламповых усилителей, 20 потенциометров для установки коэффициентов и 10 конденсаторных переключающих цепей. Коэффициенты устанавливаются с точностью 1%. Устройство имеет осциллоскоп для визуального наблюдения решения. Приведена блок-схема устройства. Д. Ф. Шапошников

4165. Расчетный стол переменного тока (An impedance type network analyser), Electr. J., 1954, 152, № 15, 1170—1171 (англ.)

В Англии сооружен расчетный стол переменного тока, моделирующий систему с помощью кажущихся сопротивлений (*R*, *L*, *C*) и предназначенный главным образом для исследования вопросов, связанных с эксплуатацией и проектированием электрических систем: регулирование напряжения в различных точках системы, определение потокораспределения в различных режимах, статическая и динамическая устойчивость, токи короткого замыкания. На этом расчетном столе также могут быть решены с помощью метода электрических аналогий различные физические и механические задачи. Работает расчетный стол на переменном токе с частотой 1592 *гц*.

Расчетный стол имеет 12 генераторных единиц, 120 линейных элементов, 36 нагрузочных, 36 автотрансформаторов и 72 емкостных элемента, предназначенных для замещения исследуемой системы. Все элементы, за исключением генераторных единиц, разбиты на четыре группы, каждая из которых имеет свое коммутационное поле для соединения их в заданную схему. Генераторные единицы могут приключаться к любому коммутационному полю. Измерительные приборы автоматически приключаются к любой точке рассматриваемой схемы. От общего источника с частотой 1592 *гц* питаются все генераторные единицы. Регулирование амплитуды и фазы напряжения любой генераторной единицы производится независимо от других.

Линейные элементы состоят из последовательно соединенных активных и индуктивных сопротивлений; емкостные элементы могут включаться как последовательно, так и параллельно и служат для замещения емкостной проводимости воздушных и кабельных линий, синхронных компенсаторов и статических конденсаторов; нагрузочные элементы состоят из параллельно соединенных активных и реактивных сопротивлений. Каждый нагрузочный элемент снабжен вольтметром. Главные измерительные приборы имеют световой отсчет. Угол сдвига фаз измеряется электронным прибором и отсчитывается по шкале, нанесенной на экране катодной трубки. Для контроля правильности собранной схемы служит мнемоническая схема. А. А. Крюков

4166. Обзор электронных моделирующих устройств. Уэйдел, Уэртем (A survey of electronic analog computer installations. Wadel L. B., Wortham A. W.), I. R. E. Trans. Electronic Comput., 1955, **EC-4**, № 2, 52—55 (англ.)

Обзор составлен на основе материалов 96 организаций США и Канады, располагающих электронными моделирующими устройствами. Для оценки размеров отдельных установок в качестве основного показателя принято количество усилителей. Приведены таблицы распределения моделирующих устройств по районам и организациям США и Канады. Количество усилителей в среднем для промышленных установок равно 105, для государственных — 86 и университетских — 59. Приведены сводные диаграммы, показывающие наименьшее время службы установок, количество моделирующих устройств с определенным числом усилителей, ввод в действие новых устройств. Приводится перечень организаций, имеющих электронные моделирующие устройства. Д. А. Абдуллаев

4167. **Моделирующие устройства. Мак-Доннел** (Fundamentals of analog computers. McDonnell J. A.), Instrum. and Automat., 1954, **27**, № 11, 1797—1803 (англ.)

Описаны принципы устройства вычислительных элементов (интеграторов и сумматоров) моделирующих устройств, использующих усилители постоянного тока для решения обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Приводится пример составления схемы из этих элементов для решения простейшей системы уравнений динамики полета самолета (5 уравнений) при их линеаризации. Указывается на возможность использования этих устройств для анализа процессов в химической промышленности. Н. Н. Ленов

4168. **Путем моделирования** (By analogy), Industr. Bull. Arthur D. Little, Inc., 1955, № 321 (англ.)

В популярной форме излагается вопрос об использовании моделирующих устройств в технике, науке и военном деле. Сообщается, что устройства для моделирования систем управления огнем по самолетам имеют точности порядка 0,2%. Ю. И. Кириленко

4169. **Вычислительная машина для выбора экономичного режима системы. Эрли, Смит, Шрёдер** («Early bird» guides system loading. Early E. Donald, Smith Grady L., Schroeder R. L.), Electr. World, 1955, **143**, № 2, 62—64 (англ.)

Сообщается, что вычислительное устройство «Эрли Бирд» (Early Bird), служащее для выбора наиболее экономичного режима энергетической системы, работает уже в течение полугода в Компании «Southern Co. Power Pool». При выборе режима учитываются стоимости топлива на отдельных станциях, потери мощности в линиях передачи и другие факторы, влияющие на стоимость энергии. Применение такой вычислительной машины в энергетической системе позволяет своевременно вводить и выводить из работы источники энергии; изменять суммарную мощность генераторов с учетом сведения режима к наиболее экономически выгодному; изменять нагрузку генераторов ступенями в несколько *мгвт*, вместо десятков *мгвт*; не допускать перегрузки отдельных линий передачи. А. А. Крюков

4170. **Применение моделирующих устройств к некоторым задачам автоматического регулирования. Арнеодо** (I circuiti analogici applicati allo studio dei servocomandi. Arneodo Carlo), Atti e rass. tecn., 1954, **8**, № 10, 393-397 (итал.)

См. РЖМех, 1955, 3519.

4171. **Система для воздушного охлаждения и поддержания стабильной температуры в моделирующем устройстве АГВАК** (Air cooling and temperature control for an analogue computor), Industr. Heat Engr, 1954, **16**, № 109, 346—347 (англ.)

Описывается устройство системы для охлаждения и поддержания стабильной температуры в моделирующем устройстве АГВАК, спроектированное фирмой «Эллиотт» и установленное в Управлении оружием дальнего действия в Австралии. Моделирующее устройство содержит 1900 ламп, причем общая мощность рассеивания достигает 25 *квт*. Система поддерживает температуру равной 25 $\pm$1,5°. Она состоит из замкнутой системы циркуляции, в которой поддерживается необходимая температура воздуха, и разомкнутой системы для продува оборудования и выброса воздуха в атмосферу. Система циркуляции имеет систему для обогрева воздуха мощностью 13 *квт* и систему охлаждения, через которую протекает холодная вода с температурой 7°. Регулировка температуры воздуха в вычислительном устройстве производится путем изменения количества воды, поступающей для охлаждения воздуха, или путем включения подогрева воздуха; управление производится с помощью реле. В систему открытого продува включен нагревательный элемент. В обеих системах продув воздуха обеспечивается с помощью двух двухступенчатых вентиляторов диаметром 50 *см*. И. М. Витенберг

4172. **Клапанный суб-блок ЗС-РАС** (Logical gate package), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 4, 406 (англ.)

Сообщение фирмы «Компьютер Контрол» (Computer Control Co.) о выпуске стандартного логического блока для вычислительных машин, работающего на частоте 1 *Мгц*. В блоке имеется два клапана на четыре входа и два клапана на три входа. Выходы клапанов через смеситель подаются на линию задержки в 1 *мксек*. Сигнал с линии задержки попадает на усилитель, в анод которого включен трансформатор для согласования усилителя с низкоомной нагрузкой и переворачивания сигнала, таким образом усилитель имеет положительный и отрицательный выходы. Низкое выходное сопротивление (93 *ом*) позволяет подключить усилитель либо непосредственно к десяти входам аналогичных клапанов, либо к кабелю. Клапаны собраны на германиевых диодах. Элементы блока смонтированы на панели площадью 42 *см*^{2} и толщиной 2 *см* с напечатанной схемой соединений. Потребляемая мощность 4 *вт*. Описанный блок входит основной составной частью в цифровое устройство ЗС-РАС, где используются также блок синхронизации, кварцевые и электромагнитные линии задержки и источник питания. Л. С. Легезо

4173. **Устройство с обратной связью для деления чисел в цифровой форме. Мейер, Гордон, Никола** (An operational-digital feedback divider. Meyer M. A., Gordon B. M., Nicola R. N.), I. R. E. Trans, 1954, **EC-3**, № 1, 17—22 (англ.)

Описывается устройство для деления двух двоичных чисел, сделанное фирмой «Лэборатории фор Электроникс» (Laboratory for Electronics, Inc). Устройство состоит из регистров делимого X и делителя Y с параллельными выходами, двоичного счетчика с прямым и обратным направлениями счета, в котором происходит формирование частного Z, и трех вспомогательных двоичных множительных устройств, вырабатывающих серии последовательных импульсов, количество которых пропорционально произведению сомножителей. Ввод данных в регистры X и Y может быть как последовательным, так и параллельным Импульсы делимого X и делителя Y подаются на входы соответствующих регистров одновременно. В двух двоичных множительных устройствах происходит перемножение импульсов F (следующих непрерывно) на X, на Z, а в третьем перемножаются FZ на Y. В результате на выходах соответствующих множительных устройств образуются произведения FX, FZ и FYZ. Импульсы, следующие с частотой повторения F, с помощью которых образуется произведение FX, и другие импульсы той же частоты повторения F, с помощью которых образуются произведения FZ и FYZ, должны быть сдвинуты между

собой во времени, например, на 180°. Произведение FX в виде серии непрерывно следующих импульсов подается на вход прямого счета (т. е. суммирования) счетчика Z, произведение FYZ подается на вход обратного счета (т. е. вычитания) того же счетчика Z. В результате смещения импульсов одного произведения относительно импульсов другого произведения в счетчике происходит поочередно то суммирование, то вычитание. Число каскадов счетчика соответствует количеству разрядов в числах. Приводится теория работы делительного устройства. Зависимость величины двоичного числа, формирующегося в счетчике Z, от времени t выражается равенством

$$Z(t) = \int_0^t \frac{XF}{2^n}\,dt - \int_0^t \frac{YFZ(t)}{2^n}\,dt,$$

где F — частота повторения вспомогательных импульсов, n — количество разрядов в числе. Первый интеграл представляет собой накопленные импульсы прямого счета, а второй интеграл — накопленные импульсы отрицательного счета. После интегрирования получено выражение:

$$Z(t) = \frac{X}{Y}\left[1 - e^{-\frac{YF}{2^n}t}\right] - Z(0)\,e^{-\frac{YF}{2^n}}$$

из которого видно, что с ростом t величина Z приближается по экспоненциальному закону к истинному значению частного. Соответствующим выбором параметров n и F можно изменить скорость формирования частного. В случае плавного и сравнительно медленного изменения входных данных ошибка при вычислении частного будет незначительна.

Авторы выводят выражение для времени t_s формирования частного с точностью до последнего знака. Выражение имеет вид

$$t_s = \frac{2^n}{YF}\ln 2^n\left[\frac{X}{Y} + Z(0)\right].$$

Затем приводится вычисление максимального значения t_s для конкретного случая. Выбрав $n = 9$, что дает точность вычисления 0,2%, $F = 10^6$, и наихудшее сочетание остальных параметров $X = 511$, $Y = 1$; $Z(0) = 511$, авторы определяют, что t_s в этом случае не превосходит 6,75 *мсек*.

Авторы считают, что устройства подобного типа могут найти применение при точном делении частоты, а также для измерения скорости изменения частоты следования импульсов, например при счете радиоактивных частиц.

Изготовленная модель имеет 11 разрядов и работает на магнитных счетчиках. Частота следования импульсов 100 *кгц*. В настоящее время изготовлены магнитные счетчики на частоту 1 *Мгц*. Б. И. Шитиков

4174. Импульсный умножитель. Лиламан (Multiplieurs a découpage temporel. Lilamand M.), Onde électr., 1955, **35**, № 335, 88, 142—150 (франц.; рез. англ.)

Описывается устройство для умножения двух напряжений. Устройство состоит из модулятора и собственно умножителя. Модулятор вырабатывает колебания, период которых пропорционален одному сомножителю, а амплитуда другому. Собственно умножитель представляет собой клапанный блок, пропускающий колебания модулятора. Импульсы, прошедшие через клапан, заряжают конденсатор, напряжение на котором пропорционально произведению. Прибор обеспечивает точность около 0,1%. Р. Д. Бачелис

4175. Запоминающее устройство «мнемотрон» в действии («Mnemotron» memory is now in operation), Midwest Engr, 1955, 8, № 1, 7—9 (англ.)

Сообщается, что фирмой «Интернейшнл Телеметер» (International Telemeter Corp.) разработано матричное запоминающее устройство на ферритовых сердечниках. Устройство содержит 170 000 сердечников и 1207 электронных ламп. Подобные устройства будут поставлены в Аргоннскую национальную лабораторию, на Абердинский полигон и в институт Вейсмана. Д. А. Абдуллаев

4176. Запоминающее устройство на магнитном барабане. (Magnetic storage drum), Instruments and Automat., 1955, **28**, № 3, 378 (англ.)

Сообщение фирмы «Имтра» (Imtra Corp.) о новом запоминающем устройстве на магнитном барабане, сконструированном для машины Марк III, работающем на частоте 1 *Мгц*. На барабане, вращающемся со скоростью 6000 об/мин., размещается 8193 33-разрядных числа. 256 головок расположены блоками по окружности барабана. В каждом блоке размещено 32 головки. Приведена фотография барабана. А. И. Щуров

4177. Простые и многоканальные магнитные головки (Single and multi-channel magnetic recording heads), Computers and Automat., 1955, 4,, № 3, 37 (англ.)

Сообщение фирмы «Райтеон» о выпуске многоканальных магнитных головок, набираемых из стандартных одноканальных головок. А. И. Щуров

4178. Твердые ультразвуковые линии задержки фирмы «Андерсен» (Andersen solid ultra-sonic delay lines), Computers and Automat., 1955, 4, № 4, 55 (англ.)

Сообщение фирмы «Андерсен» (Andersen Laboratories Inc.) о разработке твердых ультразвуковых линий задержки, предназначенных для применения в счетных машинах и специальных приборах, со следующими данными: время задержки от 1 до 3300 *мксек*., полоса пропускания до 100% от несущей частоты, затухание от 25 до 60 *дб*, несущая частота от 5 до 70 *Мгц*. Сообщается о выпуске типовых линий задержки, предназначенных для вычислительных машин. Линии имеют время задержки 384,6 *мксек*, несущую частоту 30 *Мгц*, полосу пропускания 7 *Мгц*, затухание 48 *дб* и уровень ложных сигналов на 34 *дб* ниже уровня основного сигнала. Л. В. Кутуков

4179. Элементы вычислительных машин на ферромагнитной керамике (Ferroceramic-magnetic computer elements), Instrum. and Automat., 1955, 28, № 3, 378 (англ.)

Сообщение о выпуске фирмой «Поттер» (Potter Instrument Co.) малогабаритных элементов вычислительных машин на магнитной керамике, так называемых «магнисторов», работающих на частотах до 30 *Мгц*.

Выпускаются элементы двух типов. «Временный» (transient), имеющий управляющую и сигнальную обмотки. Иногда добавляется «запрещающая» обмотка, которая блокирует действие управляющей обмотки. Магнистор этого типа является магнитным усилителем с коэффициентом усиления по мощности порядка 10^7. «Постоянный» (permanent), имеющий сигнальную обмотку и две управляющие для записи 1 или 0 в сердечнике; является запоминающим элементом с чтением информации без стирания.

Приведены принципиальная схема и конструктивное оформление простейшего элемента типа «временный». О. В. Росницкий

4180. Саморазогревные термоэлектронные лампы. Гопкинс (Self-heating thermionic tubes. Hopkins E. G.), Proc. Instn Electr. Engrs, 1954, **101**, part 3, № 70, 77—83 (англ.)

В современных электронных лампах мощность, рассеиваемая на аноде лампы, теряется бесполезно.

Мощность нагрева анода можно использовать для разогрева термоэлектронного катода лампы. Катод подобной лампы представляет собой две одинаковые эмиттирующие поверхности, например оксидные. Для нагрева эмиттирующих поверхностей используется мощность электронной бомбардировки. Перед включением лампы в работу хотя бы один из электродов ее должен быть заранее нагрет до рабочей температуры. Работа лампы возможна только при напряжении между электродами выше некоторой критической величины.

Описаны три типа саморазогревных ламп: термоэлектронный реостат, саморазогревный триод и термоэлектронный регулятор напряжения.

Термоэлектронный реостат представляет собой саморазогревный диод, межэлектродное пространство и, следовательно, пропускаемый ток которого меняется при перемещении одного из электродов. Экспериментальный термоэлектронный реостат удовлетворительно работал на омическую нагрузку только в диапазоне мощностей в нагрузке от 14 до 122 *вт*.

Саморазогревный триод имеет два плоских катода и сетку, расположенную между ними. Триод можно использовать как регулируемое сопротивление для стабилизации напряжения питания переменного тока или в качестве генератора, работающего при низком напряжении питания. Один из экспериментальных триодов работал в качестве генератора, отдавая мощность 20 *вт* на частоте 4 *Мгц*.

У термоэлектронного регулятора скорость срабатывания при изменении напряжения питания является логарифмической функцией времени, поэтому он может применяться только там, где время срабатывания некритично. В. А. Зимин

4181. Надежность электролитических конденсаторов в вычислительных машинах. Ван-Баскерк (Reliability of electrolytic capacitors in computers. VanBuskirk Mark), Proc. Eastern Joint Computer Confer., 1953, December 8—10, 105—109 (англ.)

Рассматриваются методы эксплуатации в вычислительных машинах электролитических конденсаторов, обеспечивающие максимальную надежность последних. Рекомендуется при установке новых электролитических конденсаторов увеличивать подаваемое на них напряжение постепенно. Приводятся требования к условиям хранения, транспортировки и монтажа электролитических конденсаторов. А. Б. Залкинд

4182. Операционный усилитель (Operational amplifier), Instrum. and Automat., 1955, **28**, № 5, 816 (англ.)

Сообщается об универсальном операционном усилителе для моделирующих устройств. Приводятся принципиальные схемы применения этого усилителя в качестве сумматора, трансформатора сопротивлений и делителя-умножителя. Технические данные усилителя: несущая частота 300 или 400 *гц*, входное сопротивление 2 *Мом*; коэффициент усиления при разомкнутой петле обратной связи $20 \cdot 10^3$; уровень шумов менее $0{,}1 \cdot 10^{-3}$ *в*. Г. К. Кузьминок

4183. Применение электрических решающих устройств. Дейвис (Application factors for electrical resolvers. Davis Sidney), Electr. Manufact., 1953, **51**, № 3, 128—133, 326, 328 (англ.)

Описаны схемы и принцип действия синусно-косинусных вращающихся трансформаторов (ВТ), используемых для решения трех математических задач, связанных с автоматическим управлением стрелковыми установками: 1) преобразования координат точки при повороте прямоугольных координатных осей относительно начала координат; 2) преобразования прямоугольных координат в полярные; 3) преобразования полярных координат в прямоугольные.

Дается анализ схемы замещения синусно-косинусного ВТ. Погрешность измерений зависит от колебаний температуры, частоты, питающего напряжения, нагрузки и т. д. Для уменьшения амплитудной и фазовой ошибок применяются методы компенсации. Приведены две схемы ВТ с компенсацией. При этом используются усилители с отрицательной обратной связью.

Сообщается, что фирмой «Арма» (Arma Corporation of Brooklyn) разработаны ВТ, имеющие следующие параметры: частота 400 *гц*; точность 0,1%; размеры—диаметр 36 *мм*, длина 40 *мм*, вес 160 *г*.

В отдельном блоке собираются усилители и элементы компенсации. Размеры блока (для частоты 400 *гц*) 100 × 50 × 45 *мм*. Приведена таблица погрешностей ВТ. Указано на возможность использования разработанных ВТ не только для военных целей, но и в вычислительных устройствах для промышленных целей и особенно в навигационном оборудовании. В. В. Бардиж

4184. Счетный дифференциал (Computing differential), Tele-Tech, 1954, **13**, № 5, 95 (англ.)

Сообщение формы «Сперри» (Sperry) о новом Т-образном дифференциале для счетных целей, посредством которого механически производится сложение и вычитание с большой точностью. Агрегат может работать в различных внешних средах. Вес его менее 30 *г* при габаритах, меньших 22,5 *мм*. Момент вращения без нагрузки 0,013 *г·см*. Для уменьшения износа и стойкости против коррозии он выполнен из нержавеющей стали. Предназначен как для военных, так и для коммерческих целей. А. А. Любович

4185. Применение магнитных усилителей в моделирующих устройствах. Дейвис, Свифт (An analogue computer technique using magnetic amplifiers. Davis B. E., Swift I. H.), Commun. and Electronics (N. Y.), 1955, № 16, 635—640 (англ.)

Применение в моделирующих устройствах магнитных усилителей с коэффициентом усиления по току порядка 10^3 позволяет строить надежные, малогабаритные схемы, содержащие, кроме усилителей, полупроводниковые диоды и прецизионные сопротивления. При этом достигается точность около 1%.

Рассмотрены некоторые конкретные схемы (сумматор, перемножатель) и приведены результаты их испытания. О. В. Росницкий

4186. Автоматическая регистрация результатов испытаний (Automatic logging), Chem. Engng, 1953, **60**, № 9, 438 (англ.)

Выпущена система для автоматической регистраций результатов электрических измерений различных процессов. Система может работать совместно с большинством измерительных приборов, выпускаемых американскими фирмами и дающими на выходе постоянный ток в пределах от 0,5 до 5 *ма* Данные печатаются в виде таблиц. В. В. Васманов

4187. Электрографическое записывающее устройство (Electrographic recording), J. Franklin Inst., 1955, **259**, № 5, 476 (англ.)

Сообщается о сверхбыстродействующем устройстве печати, разработанном фирмой «Берроус» (Burroughs). Устройство может применяться для вывода данных из вычислительных машин, печати ярлыков, а также при снятии копий и в системах связи.

Бумага, покрытая специальным составом, протягивается со скоростью 13 *м/сек* мимо записывающей головки, представляющей собой матрицу из 35 проволочек (7 × 5). Матрица запитывается от дешифратора, управляемого сигналами, приходящими с перфокарт, перфоленты, магнитной ленты и т. п. При возбуждении проволочек импульсами длительностью 3 *μсек*. бумага заряжается и затем попадает в ванну с сухим

чернильным порошком, мельчайшие частицы которого прилипают к заряженным точкам. После этого изображение фиксируется при протяжке бумаги через горячие валки. Одна матрица печатает 5000 знаков в 1 сек. Количество матриц можно увеличить. Мощность, расходуемая устройством с одной матрицей, включая мощность, потребную для протяжки бумаги, составляет 5 *вт*. Бумага проста в изготовлении и недорога. Л. С. Легезо

4188. Устройство для вычерчивания кривых и обратного преобразования их в напряжение (X-Y recorder and automatic curve follower), Instruments, 1953, **26**, № 11, 1640 (англ.)

Сообщение фирмы «Мозли» (F. L. Moseley Co.) о выпуске устройства для вычерчивания кривых и для обратного преобразования их в напряжение. Кривые вычерчиваются пером, приводимым в движение сервоприводом, на листе размером 210 × 275 *мм*. При воспроизведении кривых вместо пера вставляется головка с катушкой. Кривая предварительно вычерчивается проводящими чернилами, через которые затем пропускается ток высокой частоты. При движении бумаги в катушке индуктируется напряжение, которое управляет тем же сервоприводом, передвигающим ползунок на делителе напряжения и перемещающим катушку вдоль кривой. Выходное напряжение снимается с делителя. Скорость вычерчивания и воспроизведения 250 *мм/сек*. Л. С. Легезо

4189. Четырехполюсники для преобразования цифровых данных в угловое положение вала. О'Нил (Networks for digital-to-analogue shaft-position transducers. O'Neil S. J.), Commun. and Electronics, 1954, № 15, 456—466 (англ.)

Рассматриваются релейные схемы преобразования цифровых данных в угловое положение вала. В зависимости от цифровых данных, поступающих от вычислительной машины, на схеме, состоящей из реле и сопротивлений, синтезируется определенное количество периодов синусоиды, которая подается на двухфазный или трехфазный мотор. Вид аппроксимации синусоиды, подаваемой на мотор, зависит от требуемой точности и количества разрядов цифрового кода.

Приводится таблица точностей и требуемого количества цифровых разрядов при определенных видах аппроксимации.

Вид аппроксимации	Максимальная угловая ошибка в градусах	Необходимое число цифр кода
2-фазная трапецоидальная	4,1	6
3-фазная трапецоидальная	1,1	7
2 фазная с помощью 2 отрезков на 1/4 периода	0,4	9
3-фазная, с помощью 3 отрезков на 1/4 периода	0,13	10
2-фазная с помощью 4 отрезков на 1/4 периода	0,04	12

Для большинства видов аппроксимации даются принципиальные схемы для преобразования цифровых данных и вид аппроксимирующего напряжения. В. Б.

4190. Устройство для преобразования углового перемещения вала в цифровую форму (Analog to digital converters), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 4, 406, 408 (англ.)

Сообщение фирмы «Колман Энджиниринг» (Coleman Engineering Co.) о выпуске нового электромеханического устройства для преобразования поворота вала к 10- или 15-разрядные двоичные числа. Выходные контакты устройства могут переключать ток 250 *ма* при постоянном напряжении 40 *в*.

Устройство выпущено в двух видах. Модель P10D может считать до 1023, модель P15D может считать до 32767. Обе модели за один оборот вала досчитывают до 64. Размеры обеих моделей 60 × 170 × 110 *мм*. Устройство работает при минимальном моменте на валу $7{,}5 \cdot 10^{-6}$ *кГм*. Л. С. Легезо

4191. Устройство для преобразования углового перемещения вала в цифровую форму (Analog-digital converter), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 4, 408 (англ.)

Сообщение фирмы «Электро-механикл Лэбораторн» (Electro-Mec. Lab., Inc.) о выпуске нового электромеханического устройства для преобразования поворота вала в цифровую форму. Устройство работает при минимальном моменте на валу $0{,}1 \cdot 10^{-3}$ *кГм*. На выходе получаются 8-разрядные двоичные числа. Устройство может быть подключено к дополнительному счетчику для расширения пределов измерения. Номинальное число оборотов 650 в 1 мин. Устройство рассчитано на $5 \cdot 10^6$ оборотов с обеспечением точности не более 10′ и имеет габариты 50 × 40 *мм*. Диаметр вала 3 *мм*. Вес устройства 90 *г*. Л. С. Легезо

4192. Регистратор и преобразователь первичной информации (Data handling instrument), Rev. Scient. Instrum., 1955, **26**, № 4, 405—406 (англ.)

Сообщение фирмы «Фишер энд Портер» (Fischer and Porter Co.) о выпуске нового регистратора и преобразователя нецифровой информации. Описываемое устройство периодически регистрирует на бумаге и перфоленте в десятичной и двоичной системах счисления поступающие на его вход значения температуры, давления, напряжения и тому подобных переменных величин. Может производиться одновременная регистрация нескольких измеряемых величин, период регистрации может регулироваться. Регистрироваться могут мгновенные значения измеряемых величин в момент регистрации, их средние значения за период регистрации, максимальные значения за период, значения измеряемых величин, отклоняющиеся от их нормальных значений, и т. д. Кроме того, описываемое устройство может производить математические операции (в нецифровой форме) над значениями поступающих на вход величин: извлечение квадратного корня, дифференцирование по времени и т. д. и записывать результаты этих операций в цифровой форме. Точность регистратора при записи электрических величин ±0,15%, при записи пневматических величин ±0,25%. С. Е. Жорно

4193. Печатные многоконтактные штепсельные разъемы. Новак (A printed circuit multi-conductor plug. Novak Warren D.), Proc. Nat. Electronics Confer. Vol 8, Chicago, 1953, 489—494 (англ.)

Фирмой «Дженерал Электрик» (General Electric Co.) разработаны многоконтактные штепсельные разъемы «Новакон» (Novacon), в которых используются печатные схемы. И вилка и розетка штепсельного разъема собираются из одних и тех же печатных основных элементов. Количество контактов зависит от числа основных элементов в сборке. Разъем снабжен замком, препятствующим самопроизвольному разъединению розетки с вилкой. Большинство деталей штепсельного разъема изготавливается штамповкой или прессовкой. Конструкция его такова, что сборка может быть легко автоматизирована. Разъем вполне универсален и может использоваться для соединения двух жгутов, жгута с печатной схемой и двух печатных схем. Сопротивление между двумя соседними контактами разъема при комнатных условиях не менее 30 *Мом*. Два соседних контакта выдерживают на уровне моря без пробоя напряжения 2—3 *кв*, а на высоте 24 000 *м* — 700 *в*. Сопротивление контактов не превышает 0,01 *ом*. А. И. Щуров

4194. Кристаллические триоды увеличивают надежность вычислительной машины (Transistors increase computer reliability), Automatic Control., 1955, **2**, № 4, 4—6 (англ.)

Отдельные сообщения о новых устройствах на полупроводниковых элементах, разработанных в США, в том числе:

1. Вычислительная машина на кристаллических триодах ТРАДИК фирмы «Белл» (РЖМат, 1956, 4137, 4138).

2. Преобразователь кода Морзе лаборатории C. G. S., устройство принимает до 600 кодов в 1 мин. и преобразует их в сигналы, управляющие телетайпом.

3. Новые схемы, разработанные фирмой «Филко» (Philco) и использующие непосредственную связь между кристаллическими триодами. В таких схемах используется значительно меньше сопротивлений и емкостей. Использование этих схем для вычислительной техники позволило построить универсальную машину, занимающую площадь 0,2 *м*² (ТРАНЗАК—*Реф.*). Машина может выполнять все расчеты, требуемые для навигации, полета, управления огнем и бомбометанием. Все отдельные схемы с кристаллическими триодами смонтированы на одинаковых платах с печатным монтажом и являются весьма удобными для серийного производства, а также пригодны для производства, предусматривающего автоматическое изготовление узлов и сборку аппаратуры.

4. Устройство фирмы RCA, воспроизводящее с большой скоростью на экране электроннолучевой трубки цифры и буквы, соответствующие принимаемым кодам. Кодовые сигналы могут поступать с перфоленты, клавиатуры, магнитостатического запоминающего устройства или быть приняты по радио. Скорость работы устройства допускает запись 100 000 знаков в 1 мин. на фотопленку. Хотя установка предназначается для выходных устройств быстродействующих вычислительных машин, в дальнейшем она может быть использована для электронной типографской печати. На 5-дюймовом экране воспроизводящей трубки размещается одновременно до 4000 знаков. Размер знака на экране может регулироваться. А. Б. Залкинд

4195. Оптическое устройство для определения смещения стержня и цифровой регистр, использующие кристаллические триоды. Фоллингстад, Шайв, Йегер (A transistor optical position encoder and digit register. Follingstad H. G., Shive J. N., Yaeger R. E.), Proc. Nat. Electronics Confer., vol. 8, Chicago, 1953, 766—775 (англ.)

Рассматривается система для дешифрирования в цифровой форме линейного смещения стержня. В течение одной секунды значение координаты стержня 10 раз выдается в виде следующих друг за другом последовательно во времени импульсов двоичного кода. Эти коды могут являться исходными данными для вычислительной машины. Для получения желаемой точности измерений ± 0,0002 *см* требуется различать изменение координаты на 0,0005 *см*. На конце перемещаемого стержня крепится стеклянная пластина с нанесенными на ее поверхность несколькими двоичными кодами в виде чередующихся прозрачных и непрозрачных участков. По вертикали пластины наносится 6 разрядов одного кода. Разрядная лампа освещает через кодовую пластину 6 германиевых фотоэлементов с частотой 10 раз в 1 сек. Код, находящийся перед фотоэлементами, считывается и устанавливается в регистре. Для получения требуемой точности ширина «читающей» щели, расположенной перед фотоэлементами, не должна превышать 0,0002 *см*.

Во избежание больших погрешностей в системе используется не обычный двоичный, а так называемый рефлексный код (код Грея). Специальное устройство, совмещенное с регистром, переводит принятый рефлексный код в двоичный код. Затем принятая информация последовательно сдвигается в вычислительную машину. Все элементы описываемого устройства построены на точечно-контактных кристаллических триодах. В качестве фотоэлементов используются германиевые фототранзисторы с *p-n* переходом типа М-17-40. Приводится подробное описание блок-схем отдельных узлов и конструкции оптической части установки.

Объем, занимаемый всей установкой, состоящей из трех блоков, 5 *дм*³; общий вес 2,8 *кг*; полное потребление мощности 16 *вт*, из них источник света потребляет 8 *вт*. При первых испытаниях устройство допускало изменение питающих напряжений на ± 20% от номинальных значений. Через 6 месяцев работы дешифратора пределы допустимого изменения питающих напряжений уменьшились до ±5%. Это было связано с плохой герметизацией используемых образцов триодов. Модель устройства работала непрерывно в течение трех месяцев. За это время вышла из строя осветительная лампа и триод, используемый в триггере, управляющем осветительной лампой. Все прочие элементы работали безотказно. А. Б. Залкинд

4196. Перспективы применения кристаллических триодов в США (Transistor trends in the U. S. A.), Brit. Communs and Electronics, 1955, **2**, № 5, 79 (англ.)

Сообщение американского корреспондента журнала Brit. Communs and Electronics о перспективах использования кристаллических триодов в связной и военной аппаратуре. Фирма «Белл» построила на кристаллических триодах вычислительную машину ТРАДИК для использования на самолетах Военно-воздушных сил.

Фирма «Белл Систем» построила устройство для автоматического вызова абонента на междугородних линиях с использованием 230 кристаллических триодов и фотодиодов.

Лаборатория Линкольна в Массачусетском технологическом институте сообщила о разработке переключающих схем для вычислительных машин на слоевых кристаллических триодах.

Фирма «Миннеаполис Хонейвелл» (Minneapolis Honeywell Regulator Co.) выпустила образцы триодов 2N57, рассеивающих мощность 20 *вт*.

Фирма «Райтеон» (Raitheon) разработала мощные триоды, рассеивающие мощность 40 *вт*. Экспериментальный кристаллический тетрод лаборатории «Белл» работает на частоте 440 *Мгц*. А. Б. Залкинд

4197. Применение кристаллических триодов. Антула (Primena tranzistora. Antula Jovan), Tehnika, 1955, **10**, № 1, 62—63 (серб.)

Кратко прослеживается развитие кристаллических триодов в США. Указывается, что в 1953 г. на рынок поступили первые кристаллические триоды серийного производства. Перечисляются преимущества (долговечность, стойкость против механических сотрясений, малый расход энергии) и недостатки (зависимость от температуры, высокая стоимость) кристаллических триодов. Стоимость кристаллических триодов снижается за счет механизации их производства и замены германия кремнием. По уровню шумов кристаллические триоды новых типов сравнимы с электронными лампами. Типичные параметры кристаллических триодов даны в следующей таблице, где R_i — входное сопротивление, R_0 — выходное сопротивление, VG — коэффициент усиления по напряжению, PG — коэффициент усиления по мощности, α — коэффициент усиления по току.

	Заземленное основание		Заземленный эмиттер		Заземленный коллектор	
	с точечными контактами	слоевой	с точечными контактами	слоевой	с точечными контактами	слоевой
R_i	150 *ом*	90 *ом*	—35 *ком*	700 *ом*	700 *ом*	2 *Мом*
R_0	9,5 *ком*	530 *ком*	—13 *ком*	63 *ком*	—650 *ом*	25 *ом*
VG	30	1500	—130	—575	1	1
PG	100	440	1700	6600	0,1	0,02
	(20 *дб*)	(26 *дб*)	(32 *дб*)	(38 *дб*)		
α	2,3	0,69	—1,66	24	0,77	—25

В заключение говорится, что переход от электронной лампы к кристаллическому триоду равносилен по своему значению переходу от механических устройств к электронной лампе. Г. Н. Поваров

4198. Применение промышленных образцов кристаллических триодов фирмы RCA. Коэн (Application considerations for RCA commercial transistors. Cohen R. M.), Trans. I. R. E., 1954, **ED-1**, № 1, 32—46 (англ.)

Рассматриваются параметры точечно-контактных (2N32 и 2N33) и слоевых (2N34 и 2N35) кристаллических триодов, выпускаемых фирмой RCA, а также ряд схем, в которых указанные триоды используются для работы с большими сигналами на низких частотах.

Точечный триод 2N32 используется в схемах переключателей в быстродействующих цифровых машинах, генераторов колебаний (частот до 3 *Мгц*) и усилителей (частот до 1,5 *Мгц*). Приводится описание схемы триггера на одном триоде этого типа, имеющего N-образную эмиттерную характеристику. Длительность переднего фронта триггера не превышает 0,07 *мксек.*, время на запирание триода составляет 0,25 *мксек*. Приводится схема резонансного усилителя на триоде 2N32. Усилитель обеспечивает согласование между каскадами и отсутствие возможности самовозбуждения. Указывается, что характеристики каскада резко меняются при самых незначительных изменениях параметров триода или схемы.

Триод 2N33 имеет весьма малые расстояния между контактами и предназначен в основном для генерирования частот порядка 50 *Мгц*. Триод 2N34 типа *p-n-p* имеет $\alpha = 0{,}975$. Сопротивление коллектора r_k этого триода имеет разброс от 100 000 *ом* до 1 *Мом*. При увеличении окружающей температуры в диапазоне 30—50° r_k уменьшается на 2% при изменении температуры на 1°. Такое изменение r_k не имеет значения в схемах с малыми сопротивлениями нагрузки в коллекторной цепи, но являются нежелательными в тех схемах, где используются межкаскадные трансформаторы. Ток коллектор-база при запертой эмиттерной цепи I_{k_0} равен примерно 20*мка* при напряжении на коллекторе 3 *в*.

Приводятся основные характеристики усилителя, выполненного по схеме с заземленным эмиттером, необходимые для выбора режима при работе с большим сигналом. Триод 2N35— типа *n-p-n* имеет характеристики, сходные с триодом 2N34.

Применение в двухтактных схемах одновременно триодов *p-n-p* и *n-p-n* позволяет обходиться без входных и выходных трансформаторов и фазоинверсных схем. А. Б. Залкинд

4199. Схемы на кристаллических триодах для вычислительных машин. Уанласс (Transistor circuitry for digital computers. Wanlass C. L.), I.R.E. Trans. Electronic Comput., 1955, **EC-4**, № 1, 11—16, 32 (англ.)

Подробное описание схем отдельных элементов цифрового дифференциального анализатора, разработанного фирмой «Норт Американ Авиэйшн» (North American Aviation Co.). В анализаторе используется 800 кристаллических триодов, 3000 германиевых диодов и не содержится ни одной вакуумной лампы. Рабочая частота анализатора 200 *кгц*. Все блоки машины комбинируются из пяти типов схем: 1) триггер, 2) диодные дешифраторы типа «или» и «и», 3) блокинг-генератор тактирующих импульсов, 4) схема для «записи» на магнитный диск, 5) усилитель сигналов, считанных с магнитного диска.

Логические цепи анализатора используют диодные клапанирующие схемы с импульсным питанием от генератора тактирующих импульсов.

Триггерные схемы анализатора используют слоевые кристаллические триоды типа *n-p-n*, выпускаемые фирмой «Техас Инструментс» (Texas Instruments Inc.). Используемая схема триггера с емкостным выходом позволяет работать одному триггеру одновременно на 100 дешифраторов на частоте 100 *кгц*. Конденсатор, подключенный к выходу триггера, заряжается и разряжается соответственно через *n-p-n* и *p-n-p* триоды. Ток, который должен пропускать кристаллический триод, для того чтобы успеть зарядить выходной конденсатор за время между тактирующими импульсами, не превышает 2,5 *ма*, а мощность, рассеиваемая при этом на триоде, равна 12,5 *мвт*, что значительно ниже допускаемых значений.

Запуск триггера осуществляется импульсами, получаемыми на выходе диодных дешифраторов, через разделительные сопротивления. Приводится схема расчета, позволяющая выбрать величину разделительного сопротивления для данной схемы триггера так, чтобы получить требуемый запас в различии токов, текущих во входной цепи триггера при подаче на его вход запускающего импульса и импульса-помехи.

Приводятся упрощенные схемы для триггеров, отдающих небольшие токи в нагрузку, либо работающих с низкой частотой повторения. Приводится схема «записи» на магнитный диск. Обмотка записывающей головки включается непосредственно между выходами триггера. Таким образом, в обмотке не требуется иметь вывод средней точки для записи 0 и 1. Это позволяет при том же количестве витков в 2 раза увеличить ампервитки записи.

Надежность работы отдельных элементов была проверена при испытании восьмиразрядного счетчика. Схема устойчиво работала при изменении питающих напряжений от 5 до 25 *в*, сопротивлений на +95% и —50% и при уменьшении обратного сопротивления германиевых диодов до 2 *ком*.

Кристаллические триоды не требовали специального отбора. Потребляемая мощность цифрового анализатора без учета мощности, потребляемой мотором магнитного диска, не превышает 15 *вт*. А. Б. Залкинд

4200. Мощные полупроводниковые триоды фирмы «Сильвания» (Sylvania power transistors), Computers and Automat., 1955, 4, № 4, 5 (англ.)

Сообщение фирмы «Сильвания» (Sylvania) о выпуске мощных полупроводниковых триодов 2N68 (типа *p-n-p*) и 2N95 (типа *n-p-n*) с допустимой мощностью рассеивания в 2,5 *вт* на открытом воздухе и до 5 *вт* при внешнем теплоотводе. Коэффициент усиления в классе А20 *дб*. Триоды низкочастотные, работают при больших токах и малых напряжениях (напряжения источников питания 6—24 *в*).

Помимо указанных выше триодов фирма выпускает: низкочастотные триоды 2N35 (*n-p-n*) и 2N34 (*p-n-p*) с коэффициентом усиления в схеме с заземленным эмиттером до 40 *дб*; высокочастотные триоды 2N94 (*n-p-n*) и 2N94 A (*n-p-n*) с коэффициентом усиления до

40 *дб*, с $\alpha \geqslant 0{,}95$, с малым сопротивлением основания и малой емкостью коллектора; кремниевые плоскостные диоды 1N 137A и 1N 138 A с большим обратным сопротивлением при высокой рабочей температуре; кремниевые точечно-контактные диоды 1N 193, 1N 194, 1N 195, 1N 196, специально рассчитанные для применения в вычислительных машинах и для работы при высокой температуре, имеющие время установления 0,1 *мксек*.

В. К. Зейденберг

4201. P-N переходы и полупроводниковые приборы. Крёмер (*P-N*-Übergänge und Transistoren. Krömer H.), Fernmeldtechn. Z., 1954, **7**, № 2, 86—92 (нем.)

Описаны свойства *p-n* перехода с выводом формул распределения потенциала на потенциальном барьере. Описан принцип работы кристаллических диодов и точечных плоскостных полупроводниковых триодов. Приводятся типовые характеристики.

В. К. Зейденберг

4202. Полупроводниковые триоды. II. Гуггенбюль (Transistoren. II. Guggenbühl W.), Techn. Rundschau, 1954, **46**, № 27, 3, 5 (нем.)

Вторая часть популярной статьи о полупроводниковых триодах. Описаны исходные материалы, свойства и характеристики точечных и плоскостных полупроводниковых триодов и возможные сферы применения. Приводятся характеристики триодов. Ч. I см. РЖМат, 1956, 2600.

В. К. Зейденберг

4203. Установки фирмы «ИБМ» на машинносчетных станциях города Нью-Йорка. Доннелли (Las instalaciones I. B. M. en el Servicio de Cálculo Automático de la ciudad de Nueva York. Donnelly J. B.), Rev. Cálculo automát. y cibernét., 1954, **3**, № 7, 33—34 (исп.)

Сообщается, что фирма «ИБМ» разработала приемно-передающее устройство для связи по телефонно-телеграфной сети между разными машинносчетными станциями. Устройство дублирует перфокарты на расстоянии. Каждая перфокарта на принимающей станции автоматически сравнивается с картой-оригиналом на передающей станции. При подключении к телефонной линии можно передавать 16 колонок перфокарты в 1 сек. (1000 букв или цифр в 1 мин.), причем по одному проводу осуществимы четыре одновременные передачи. При подключении к телеграфной линии скорость передачи равна 6 колонкам в 1 сек., причем возможна только одна передача по одному проводу. Устройство применялось на машинносчетных станциях военно-воздушных сил и авиационной промышленности США.

Г. Н. Поваров

4204. Передача информации с перфокарт по радио (Punch cards take wings), Aviat. Week, 1954, **61**, № 9, 46 (англ.)

Сообщение об опыте передачи информации с массива перфокарт по радио из авиационной базы в Северной Африке на другой массив перфокарт — в Вашингтон. Скорость передачи 1000 знаков в 1 мин. Приемно-передающее устройство разработано фирмой ИБМ (IBM). См. также реф. 4203.

Н. П. Трифонов

4205. Быстродействующий цифровой сумматор рядов Фурье. Робертсон (A fast digital computer for Fourier operations. Robertson J. Monteath), Acta crystallogr., 1954, **7**, № 12, 817—822 (англ.)

Описывается электромеханическое устройство для подсчета сумм из 15 слагаемых вида

$$\sum_{h=1}^{15} F_h \cos 2\pi \frac{hx}{a}, \qquad (1)$$

$$\sum_{h=1}^{15} F_h \sin 2\pi \frac{hx}{a}. \qquad (2)$$

Коэффициенты F_h вводятся в машину вращением каждого из 15 входных валов на соответствующее число оборотов. Вращение производится реверсивными электромоторами со скоростью 6000 об/мин., таким образом, набор всех 15 трехзначных коэффициентов занимает несколько секунд. Умножение коэффициентов на синусы и косинусы осуществляется путем передачи вращения входных валов через зубчатые передачи. В машине используется 15 типов зубчатых передач, которые позволяют производить умножение на sin 6°, sin12°, sin18° и т. д. до sin90°. Средняя ошибка моделирования синуса не превышает 0,000001, максимальная ошибка не превышает 0,000005. Через синусы углов 6°, 12°, 18°, ..., 90° могут быть выражены косинусы этих углов, синусы и косинусы углов от 90° до 360° (через каждые 6°), а также синусы и косинусы кратных им углов. Сложение отдельных членов ряда производится суммирующими счетчиками оборотов, установленными на выходах зубчатых передач. На счетчиках отсчитываются суммы (1) и (2) для основных углов. Суммы для промежуточных значений аргумента находятся интерполированием. Описываемый быстродействующий цифровой сумматор предназначается для работ в кристаллографических лабораториях.

С. Е. Жорно

4206. Суммирование одномерных и многомерных рядов Фурье с помощью механического прибора новой конструкции. Кайман, Хоппе (Die Berechnung von ein- und mehrdimensionalen Fourierreihen mit einem mechanischen Überlagerer neuer Konstruktion. Caimann Viktor, Hoppe Walter), Z. angew. phys., 1953, **5**, № 4, 121—130 (нем.)

Описывается прибор, основанный на возможности преобразования тригонометрической суммы $\rho(x)=\sum_{h=0}^{n} A(h)\times$ $\times \sin[2\pi hx + \theta(h)]$ к виду $\rho(x) = A\{\sum_{h=1}^{n} \sin[2\pi hx + \theta'(h)] + \sum_{h=1}^{n} \sin[2\pi hx + \theta''(h)]\} + a_0$, где $\theta'(h) = \theta(h) + \arccos(A(h)/2A)$, $\theta''(h) = \theta(h) - \arccos(A(h)/2A)$. Задание коэффициентов для значений аргумента выполняется при помощи соответствующего числа линеек, измеряющих ординаты синусоидальных шаблонов. Задание фаз $\theta'(h)$ и $\theta''(h)$ определяется установкой шаблонов в соответствующее положение. Сумма ряда определяется положением линеек.

Д. П. Гроссман

4207. Метод вычисления системы булевых алгебраических уравнений. Постли (A method for the evaluation of a system of Boolean algebraic equations. Postley J. A.), Math. Tables and Other Aids Comput., 1955, **9**, № 49, 5—8 (англ.)

Описан перфокартный метод вычисления значения двоичных переменных Q_{t+1}^k ($k = 1,2, \ldots, n$), удовлетворяющих следующей системе булевых уравнений:

$$R_t^k = f_k(Q_t^q),\ S_t^k = g_k(Q_t^q),\ Q_{t+1}^k = \varphi(Q_t^k, R_t^k, S_t^k),$$

где $1 \leqslant q \leqslant n$. Предполагается, что все выражения, стоящие в правых частях этих уравнений, представлены в нормальной дизъюнктивной форме. Для вычислений с числом переменных $n \leqslant 480$ используются стандартные 80-колонковые перфокарты.

В конце заметки указано, как распространить описанный метод на случай $n > 480$ и как следует применять этот метод, когда n значительно меньше 480.

В. И. Шестаков

4208. Вычислительная машина нового вида. Голечек (Eine neuartige Rechenmaschine — eine interessante feinmechanische Konstruktion. Holecek K.), Maschinenbau und Wärmewirtsch., 1954, **9**, № 6, 155—162 (нем.)

Подробное описание портативного вычислительного прибора «Курта», изготовляемого фирмой «Контина» (Contina) в Лихтенштейне (РЖМат, 1953, 492; 1954, 3493, 4653). Дано описание внешнего вида и устройства прибора, а также работы его отдельных механизмов: переноса, счетного и передачи десятков, гашения счетчиков, блокировки. Дана эксплуатационная характеристика прибора. Приведены фото. Н. Н. Парусникова

4209. Эксплуатационные качества вычислительного устройства «Курта». Бейер (Die rechnerischen Vorteile der «Curta»-Rechenmaschine. Beyer H.), Österr. Ingr-Arch., 1955, 9, № 1, 31—37 (нем.; рез. англ., франц.)

Вычислительная машина «Курта» (РЖМат, 1953, 492; 1954, 3493, 4653) позволяет осуществлять следующие манипуляции с числами: 1) перенос числа из счетчика результатов в счетчик оборотов и наоборот; 2) перенос числа из счетчика результатов в установочный механизм (на клавиатуру). Благодаря этим возможностям на машине можно решать некоторые задачи, состоящие из последовательности арифметических действий, без записи промежуточных результатов. Рассматривается порядок выполнения на машине «Курта» основных видов вычислений по формулам вида: $a \times b \times c \times d$; $\frac{a}{b} \pm c$; $\frac{a}{b} : c$; $a \times b - c \times d + e \cdot f$; $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + \frac{e}{f}$.

Дается порядок выполнения на машине «Курта» специальных видов вычислений, встречающихся в практике: вычисление площадей треугольников при заданных координатах вершин; вычисления, связанные с решением уравнения прямой линии на плоскости; вычисления, связанные с определением координат точки пересечения ориентированных направлений из двух точек, координаты которых заданы. Н. П. Вашкевич

4210. Счетная машина для вычисления матриц. Робб (A calculator for aiding matrix calculations. Robb James C.), Trans. Faraday Soc., 1954, 50, № 1, 8—12 (англ.)

Описывается механическое вычислительное устройство, предназначенное для решения линейных однородных уравнений обращения матриц до 12-го порядка, нахождения элементов обратных матриц, а также для многих других типов вычислений, включающих манипуляции с матрицами. Применение устройства эффективно при одновременном умножении до 12 чисел на общий множитель; полученные результаты можно алгебраически складывать с другими результатами, найденными таким же образом.

Статья содержит подробное описание конструкции вычислительного устройства, состоящего из 12 приборов «Курта» мод. 1 (РЖМат, 1953, 492; 1954, 3493, 4653). Связь между отдельными элементами приборов осуществляется механически при помощи зубчатых передач. Элементы одинакового назначения (например, кольца гашения показаний счетчиков или главные валы приборов и т. п.) связываются общим приводом и приводятся в действие от одного вводного устройства (рукоятки, рычага). Для управления работой используются три ручки на корпусе, а также 12 кнопок, находящихся на приборах сверху. Ручка слева служит для подъема счетных кареток приборов и установки их путем поворота в соответствующее десятичное положение (для умножения на единицы, десятки, сотни и т п.). Центральная ручка служит для гашения показаний всех счетчиков, а ручка справа — для передачи чисел в счетчики определенное количество раз (при умножении). Для переключения любого прибора на вычитание оттягивается верхняя кнопка.

Рассмотрено решение примера на устройстве. Приводится фото прибора и две его схемы. Библ. 2 назв. Н. Н. Парусникова

4211. Не вторая ли промышленная революция? Батлер (A second industrial revolution? Butler Raymond R.), Voice Ind., 1954, 8, № 6, 40—41 (англ.)

Популярная статья о вычислительной машине ЭДСАК (EDSAC). Приводится фото машины. См. РЖМат, 1955, 3451.

4212. Универсальные «роботы». Кларк (General purpose robots. Clark Lawrence M.), Computers and Automat., 1954, 3, № 4, 22—25 (англ.)

Рассматриваются перспективы создания «робота» на базе объединения ряда приборов, выполняющих функции различных органов человека. Статья имеет популярный характер. А. Б. Залкинд

4213. Возможности вычислительных машин. Фрёйденталь (Les possibilités des machines à calculer. Freudenthal H.), Bull. Soc. math. Belgique, 1953 (1954), 6, 14—22 (франц.)

Приводится содержание публичной лекции, прочитанной автором 21 марта 1953 г. Излагаются в упрощенной форме общие идеи устройства и работы больших вычислительных машин с программным управлением. Н. Н. Поснов

4214. Счетные машины в хозяйстве. Земанек (Rechenmaschinen in der Wirtschaft und als Spielpartner. Zemanek Heinz), Radiotechnik, 1954, 30, № 4, 117—120 (нем.)

Популярная статья о применении вычислительных машин.

4215. Применение цифровых вычислительных машин при конструировании электрооборудования. Сондерс (Digital computers as an aid in electric-machine design. Saunders R. M.), Commun. and Electronics, 1954, № 12, 189—192 (англ.)

Цифровые вычислительные машины находят большое применение при конструировании электрических машин. Высокая скорость работы цифровых машин позволяет просчитывать большое число вариантов, что способствует выбору наиболее экономичной конструкции проектируемой машины. Применение цифровых машин позволяет определить влияние отдельных факторов на характеристики проектируемой машины. А. А. Крюков

4216. Мысль и машина. Стининг (The idea — the machine. Stiening Rae), Tech Engng News, 1955, 36, № 7, 44—45 (англ.)

4217. Думающие машины и человеческая личность. Грунберг (Thinking machines and human personality. Gruenberg E. L.), Computers and Automat., 1955, 4, № 4, 6—9 (англ.)

4218 П. Электронные счетные устройства. Мамма (Electronic counting devices. Mumma Robert E.) [The National Cash Register Co.]. Канад. пат. 491186, 10.03.53

Общие соображения о логике построения десятичного счетчика на четырех электронных ячейках, из которых каждая имеет два устойчивых состояния. В. К. Зейденберг

4219 П. Интегрирующая схема. Тришка, Зак (Integrating circuit. Trischka John W., Sack Henri S.) [United States of America as represented by the Secretary of the Navy]. Пат. США 2638493, кл. 171—95, 12.05.53

Устройство на шести лампах для сложения постоянных токов, состоящее из насыщенного трансформатора, возбуждаемого основной частотой, и рабочего трансформатора для получения второй гармоники, пропорциональной по амплитуде алгебраической сумме токов на входе, которая затем детектируется. Полученное постоянное напряжение после преобразований заставляет вращаться с соответствующей скоростью электромотор, связанный с индикатором суммы. О. С. Потураев

4220 П. Электронный интегратор. Янг (Electronic integrator. Young Gregory O.) [Hughes Aircraft Co.]. Пат. США 2710915, кл. 250—27, 14.06.55

Электронная интегрирующая схема, состоящая из двух ламп, работающих от положительных импульсов и заряжающих интегрирующие емкости линейно в зависимости от величины поступающего сигнала; на сетки этих ламп подаются равные по амплитуде импульсы, но противоположных полярностей. Применена схема, обеспечивающая такую подачу смещения на эти две лампы, чтобы уровень напряжения, до которого заряжается конденсатор, оставался неизмененным до поступления следующего сигнала. О. С. Потураев

4221 П. Электронный счетчик. Гопкинс, Холман (Electronic counter. Hopkins George W., Holman Wesley A.) [Friden Calculating Mashine Co., Inc.]. Пат. США 2703678, кл. 235—92, 8.03.55

Описывается кольцевая электронная счетная схема. Количество разрядов в кольце может быть различным. Каждый разряд имеет 2 устойчивых состояния и собран на одном пентоде. Входные импульсы подаются на соединенные между собой экранные сетки ламп. Импульс на следующее кольцо подается с одной из ламп предыдущей группы через передающий каскад, состоящий из триода и пентода. С. Е. Жорно

4222 П. Реверсивный электронный счетчик. Надеж (Reversible electronic counter. Nadaу Georges) [Compagnie Generale de Telegraphie Sans Fil]. Пат. США 2662692, кл. 235—92, 15.12.53

Схема счетчика на трех триггерных ячейках, в котором три из восьми возможных состояний подавляются обратными связями; таким образом счетчик является делителем на пять. Имеется два счетных входа; от одного счетчик работает на сложение, от другого — на вычитание. В. К. Зейденберг

4223 П. Электронный сумматор-аккумулятор. Стоун (Electronic adder-accumulator. Stony Joseph J., Jr) [United States of America as represented by the United States Atomic Energy Commission]. Пат. США 2705108, кл. 235—61, 29.03.55

Схема сумматора для машин с фиксированной запятой, выполненного с использованием двустабильных элементов хранения и системой диодных матриц. Л. А. Любович

4224 П. Магнитное запоминающее устройство. Стил (Magnetic memory channel recirculating system. Steele Floyd G.) [Digital Control Systems, Inc.]. Пат. США 2698427, кл. 340—174, 28.12.54

Приводится блок-схема одного канала магнитного запоминающего устройства на барабане. Прочитанные сигналы после усиления запускают триггер. Состояния триггера используются в вычислительной машине. Чтение производится с дорожки барабана последовательно. После обработки данные записываются записывающей головкой на другое место барабана. Таким образом информация «ползает» по периферии барабана. А. И. Щуров

4225 П. Система для электрических сигналов (Electrical signalling systems) [British Telecommunications Research Ltd.]. Австрал. пат. 158890, кл. 05.5; 05.7, 30.09.54

Устройство, предназначенное для запоминающих устройств на магнитном барабане. Оно позволяет коммутировать один общий для всех головок комплект усилительной аппаратуры последовательно на все головки. Скорость этой коммутации синхронизируется с движением магнитного барабана. Л. И. Бакуменко

4226 П. Записывающее устройство для вычислительных машин (Computer recording) [Standard Telephones and Cables Ltd.]. Австрал. пат. 154759, кл. 05.5, 28.01.54

Аппарат содержит устройство для записи информации, запоминающее устройство, на котором хранятся инструкции, определяющие способ записи, входное устройство, принимающее сигнал, управляющий записью, и дискриминатор, который расшифровывает принятый сигнал и тем самым выбирает соответствующую инструкцию из запоминающего устройства. Л. С. Легезо

4227 П. Преобразователь импульсного кода (Pulse code expander) [Standard Telephones and Cables Pty. Ltd.]. Австрал. пат. 158883, кл. 05.5, 30.09.54

Преобразователь импульсно-модулированного сигнала содержит декодирующее устройство для декодирования этого сигнала в амплитудно-модулированный сигнал, ряд усилителей с различным коэффициентом усиления и устройство для выбора одного из этих усилителей. Управление устройством выбора усилителей производится в соответствии с характеристикой сигнала. Л. И. Бакуменко

4228 П. Управление частотно-зависимыми характеристиками (Control of frequency-dependent characteristic) [The General Electric Co. Ltd.]. Австрал. пат. 158683, кл. 0,5.5; 05.4, 23.09.54

Метод воздействия на частотные характеристики приемных систем при помощи схем, реагирующих на форму специально передаваемого контрольного сигнала. Л. Н. Дашевский

4229 П. Электрические дешифраторы (Electrical decoding circuits) [Standard Telephones and Cables Ltd.]. Австрал. пат. 154904, кл. 05.5; 05.4; 05.2, 11.02.54

Сообщение о выпуске блока многоэлементных дешифраторов. Л. С. Л.

4230 П. Устройство для выделения импульсов одной полярности. Стоун (Polarity selector. Stone Joseph J., Jr) [United States of America as represented by the United States Atomic Energy Commission]. Пат. США 2700149, кл. 340—174, 18.01.55

Устройство выбирает из последовательности двухполярных импульсов, получающихся на выходе читающей магнитной головки, импульсы, соответствующие либо «0», либо «1». А. И Щуров

4231 П. Импульсный генератор. Эпстейн (Pulse generator. Epstein David J.) [Canadian General Electric Co., Ltd.]. Канад. пат. 493501, 9.06.53

Импульсный генератор на лампах с применением формирующего трансформатора. Приведены схема и временная диаграмма. В. А. Зимин

4232 П. Электрическое программное устройство. Кальви (Electrically operated programming apparatus. Calvi Joseph). Пат. США 2673609, кл. 161—1, 30.03.54

В устройстве имеется часовой механизм, который при движении замыкает определенным образом расположенные контакты, благодаря чему осуществляется пуск ведущего мотора. Мотор приводит в движение управляющий механизм, дающий необходимые команды в главную электрическую схему. В. Д. Князев

4233 П. Электрическое вычислительное устройство. Эйджинс (Electric computer. AginsGeorge) [American Bosch Arma Corp.]. Пат. США 2698134, кл. 235—61, 28.12.54

Дается принцип работы электрического вычислительного устройства на двух потенциометрах. Потенциометры имеют подвижный и центральный контакты. На первый потенциометр подается постоянное напряжение, на второй — напряжение с подвижного и центрального контактов первого потенциометра. Исходные величины устанавливаются с помощью подвижного

контакта потенциометров: положительные на одной, отрицательные на второй части потенциометра относительно центрального контакта. Выходное напряжение со второго потенциометра является функцией входных величин, устанавливаемых на потенциометрах. Приведена схема вычислительного устройства.

Д. А. Кузьмичев

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ И ИХ ЭЛЕМЕНТОВ В ТЕХНИКЕ

4234. Металлообрабатывающие станки, управляемые вычислительными машинами. Вильямсон (Computer-controlled machine tools. Williamson D. T. N.), Brit. Communs and Electronics, 1955, 2, № 8, 70—74 (англ.)

Приводятся сведения о работах Эдинбургской лаборатории фирмы «Ферранти» в области автоматизации станков с помощью вычислительной техники. Описан автоматизированный фрезерный станок.

По координатам опорных точек и по заданным уравнениям кривых, соединяющих эти точки, цифровая машина определяет траекторию центра фрезы относительно изготовляемой детали в виде последовательности дискретных точек. Пространственные координаты точек траектории записываются на трех дорожках магнитной ленты в виде серий импульсов. Каждому импульсу отвечает перемещение фрезы относительно изготовляемой детали на 0,0025 *мм*. Количество импульсов в серии определяет величину перемещения, а частота повторения импульсов — скорость перемещения (подачу) соответствующего рабочего органа станка. Измерение перемещений осуществляется с помощью диффракционных методов. Для поверхностей различной сложности практически оказывается достаточным, чтобы цифровая машина могла воспроизводить кривые не выше второго порядка. Отмечается достоинство разработанного способа управления для изготовления деталей, поверхности которых не могут быть описаны аналитически.

Благодаря значительной разнице в скоростях записи данных на магнитной ленте и воспроизведения этих данных в станочном агрегате, одна цифровая машина может обслуживать несколько станков или даже несколько десятков станков.

Приводятся краткие сведения о способах обнаружения ошибок программирования, кодирования, записи на магнитную ленту. Изображена блок-схема следящей системы, обеспечивающей перемещение рабочего органа станка. Сигнал ошибки представляет собой сумму двух сигналов: сигнала, пропорционального отклонению положения, и сигнала, пропорционального заданной скорости перемещения рабочего органа.

Кратко рассматриваются вопросы надежности системы и точности ее работы. В результате эксплуатации системы в течение нескольких месяцев установлено, что автоматизированная металлообработка на современных стандартных станках может быть обеспечена с минимальными отклонениями порядка $\pm 0{,}01$ *мм*. Предел точности обработки обусловлен ограничениями точности самих станков и особенностями природы процесса фрезерования, в частности, упругими деформациями обрабатываемого металла. Приводятся краткие сведения о работах фирмы по автоматизации точной координатной установки стола станка под инструментом (сверлом и т. п.) по данным кнопочного набора координат на специальном пульте. В заключение на примере двух деталей сравниваются экономические показатели обычных методов обработки с обработкой на станках, управляемых вычислительными машинами. Объемный кулачок, используемый для изготовления турбинных лопаток, изготавливается вместо трех недель в течение 4 час., включая время на подготовительные операции. Волновод сложной конфигурации изготовлялся квалифицированным рабочим в течение двух недель. Изготовление того же волновода на автоматизированном фрезерном станке занимало один час, включая время на подготовительные операции. При этом утверждается, что применение более совершенного станочного оборудования позволит сократить это время до 10 мин.

Автор считает, что внедрение автоматического управления работой станков с помощью средств вычислительной техники оправдано уже по одним экономическим соображениям.

М. М. Симкин

4235. Управление металлообрабатывающими станками с помощью вычислительной машины. Вильямсон (Computer-controlled machine-tools. Williamson D. T. N.), Aircraft Prod., 1955, 17, № 7, 267—272 (англ.)

Подробно описывается цифровая система автоматического управления станками, разработанная фирмой «Ферранти» (РЖМат, 1955, 5490; 1956, 4234). Весь процесс управления состоит из 4 этапов: приготовление стандартной таблицы на основании данных чертежа и данных, связанных с технологией обработки, кодирование данных таблицы и нанесение кода на перфоленту, определение вычислительной машиной траектории рабочего инструмента на основании данных перфоленты и запись полученных результатов на магнитную ленту, использование магнитной ленты для управления процессом обработки. Приводится блок-схема управления перемещением рабочего органа по одной координате. Описывается система диффракционных решеток для измерения перемещения и скорости движения стола, обеспечивающие точность измерения 2,5 *мк*.

В. В. Карибский

4236. Применение перфокартной вычислительной машины для автоматического управления металлообрабатывающими станками. Стилман (Using punched-card equipment for automatic machine tool control. Stillman Alan H.), Prod. Engng, 1955, 26, № 6, 172—176 (англ.)

Практическое применение методов автоматического управления металлообрабатывающими станками часто требует большой вычислительной работы для пересчета конструктивных данных изделия в данные для управляющих сервомеханизмов станка. Например, изготовление пары некруглых зубчатых колес на зуборезном станке «Fellows» с сервосистемой, управляемой перфолентой, требует предварительной затраты более 100 час. вычислительной работы на арифмометре. Использование множительного перфоратора 409-2 фирмы «Ремингтон-Ранд» сводит вычисление к трем часам. Расчет данных для изготовления пары некруглых колес ведется в 4 этапа (приведены формулы). На последнем этапе углы поворота заготовки и долбяка, а также расстояние между центрами рабочего шпинделя и шпинделя долбяка пересчитываются в шаги соответствующих величин, принятые для работы сервомеханизмов. В данном случае шаг для угла поворота рабочего шпинделя принят равным 1′ для угла поворота шпинделя долбяка в 0,01 шага зуба (0,15° для 24-зубого долбяка) и для расстояния между центрами 0,0064 *мм*. Перевод данных с перфокарт на перфоленту производится автоматически на специальном устройстве. Перфолента пригодна для многократного использования.

И. В. Лебедев

4237. Автоматическое программирование на производственных установках. Шайвли (Automatic programming of production machinery. Shively Hermon G.), Computers and Automat., 1955, 4, № 7, 29 (англ.)

Открытое письмо к лицам, занимающимся цифровой техникой, с просьбой заниматься разработкой оборудования, необходимого для автоматического управления станками. В. И. Смирнов

4238. Вычислительная машина, задающая график работы электростанций в системе. Имбурджа, Керкмейер, Стагг (A transmission-loss penalty factor computer. Imburgia C. A., Kirchmayer L. K., Stagg G. W.), Electr. Engng, 1954, **73**, № 7, 649—652 (англ.)

Описано вычислительное устройство, служащее для определения экономически наивыгоднейшего графика работ отдельных электростанций в энергетической системе. В ходе работы вычислительная машина учитывает удельную стоимость топлива на станциях, потери в сетях с учетом действительного потокораспределения мощностей в системе, к. п. д. турбогенераторов и котельных установок. Описываемое устройство позволяет быстро и точно определять для различных режимов системы наивыгоднейшее распределение нагрузок между станциями и отдельными агрегатами и оценивать увеличение потерь энергии в системе при изменении схемы сети. Устройство будет использоваться компанией «Американ Газ энд Электрик Сервис Корпорейшн» (American Gas and Electric Service Corp.). А. А. Крюков

4239. Новая вычислительная машина для воздушных данных (New air data computer), Aviat. Week, 1954, **61**, № 1, 54 (англ.)

Сообщение о разработке Корнельской авиационной лабораторией (Cornell Aeronautical Lab.) вычислительной машины, дающей на выходе сигналы, пропорциональные углу атаки, углу скольжения, действительной воздушной скорости, числу Маха и относительной плотности воздуха. Машина работает от внешнего датчика, чувствительного к давлению. Прототип машины весит около 16 *кг* и занимает объем 0,023 $м^3$.

А. И. Щуров

4240. Моделирующее устройство, спроектированное для использования авиационными инженерами (Analogue computer designed for use by aircraft engineers), Electr. Engng, 1955, **74**, № 4, 335 (англ.)

Фирмой «Линк Авиэйшн» (Link Aviation, Inc.) разработано моделирующее устройство под названием «Аэролог» (Aerolog), которое вычисляет скорость подъема, максимальные скорости полета, коэффициенты подъема и углы подъема для любого самолета. Машина предназначена для эксплуатации ее непосредственно авиационными инженерами и не требует специального обслуживающего персонала. Входными данными являются число Маха, давление, тяга мотора, полный вес самолета, относительная площадь, профиль и коэффициенты сопротивления. Получив указанные исходные данные, машина решает одновременно два уравнения движения. Вычисления производятся с точностью 0,1%, определяемой точностью поступления входных данных. Диапазон изменения переменных для числа Маха составляет от 0 до 4; для полного веса от 0 до 400 *т*; для относительной площади от 0 до 100 $м^2$. Изменение перепада давления составляет от 0 до 1,1.

А. Б. Залкинд

4241. Авиационные тренажеры. Рингем, Катлер (Flight simulators. Ringham G. B., Cutler A. E.), J. Roy. Aeronaut. Soc., 1954, 58, № 519, 153—172 (англ.)

Современный авиационный тренажер позволяет моделировать при помощи электронных и электромеханических устройств как нормальные, так и непредвиденные условия полета.

Движение самолета в полете определяется тремя уравнениями сил и тремя уравнениями моментов. В эти уравнения входят также члены, характеризующие влияние земли, щитков, закрылков, выпущенных шасси, открытых створок бомболюков, несимметричности тяги и скоса потока. В результате интегрирования уравнений определяются силы и моменты, действующие на самолет.

Для определения воздушной скорости горизонтального прямолинейного полета в счетно-решающем устройстве учитывают только поступательную скорость самолета и пренебрегают составляющими скорости, направленными вдоль поперечной и вертикальной осей самолета. Во всех других режимах полета эти составляющие скорости должны быть учтены. Составляющие линейной скорости самолета определяются интегрированием составляющих линейного ускорения. Угловые отклонения самолета определяются интегрированием угловых скоростей самолета вокруг соответствующих осей.

Моделирование двигателя усложняется тем, что каждый двигатель характеризуется в основном электрическими данными. В тренажерах удается воспроизвести только действие реактивного и поршневого двигателя, но не удается воспроизвести работу турбовинтового двигателя.

При моделировании топливной системы поток топлива заменяется протеканием в цепи электрического тока, а действие кранов — электрическими переключателями. Аналогично моделируется и гидросистема. Кабина тренажера не герметизируется, но показания приборов и действия органов управления системой герметизации моделируются.

Для моделирования радиосредств, используемых для обучения самолетовождению, осуществляется имитация расположения наземных радиостанций в соответствующем районе земного шара. При этом равносигнальные зоны направленных радиостанций воспроизводятся при помощи площадной модели или потенциометров. Такими же способами моделируется и радиооборудование посадки по приборам. Контроль «полета» по маршруту в тренажерах осуществляется путем вычерчивания самопишущими приборами маршрута на двух планшетах с картами района тренировки.

Тренажер для самолета Комета 1 содержит 500 ламп и от 80 до 100 сервомеханизмов. Электрическая сеть тренажера имеет протяженность более 70 *км*. Моделируемый полет самолета отмечается 98 приборами. Пульт управления инструктора позволяет включить около 120 различных непредвиденных случаев полета (пожар, повреждение, аварии, отказы оборудования и др.). Тренажер Комета 1 моделирует электрическую сеть самолета, автопилот, радиооборудование, гидравлическую систему, антиобледенительное и другое оборудование самолета. Однако, как и во всех других тренажерах, в тренажере Комета 1 не воспроизводится обзор из кабины, действие средств астронавигации, обзорного радиолокатора и других систем.

Ю. И. Кириленко

4242. Моделирующие устройства в аппаратуре для тренировки экипажа самолета. Катлер (Analogue computers in aircrew training apparatus. Cutler A. E.), J. Brit. Instn Radio Engrs, 1954, **14**, № 8, 351—360 (англ.)

Обзорная статья. Описывается обобщенный полетный тренажер, выполняющий приближенное моделирование полета, который оборудуется счетно-решающими устройствами для моделирования полета, работы двигателей, автопилота, средств радионавигации, гидравлического бустера, системы герметизации кабины и т. д.

Аэродинамическое счетно-решающее устройство оценивает силы и моменты, действующие на самолет, и определяет линейные и угловые отклонения самолета от моделируемой траектории. Для вычисления по аэро-

динамическим коэффициентам самолета сил и моментов используется около ста профилированных потенциометров, движки которых управляются сервомеханизмами. Полное оборудование для решения уравнений движения самолета обычно содержит 25 сервомеханизмов, 12 из которых являются интеграторами, и 50 усилителей.

Моделирование двигателя осуществляется при помощи профилированных потенциометров, движки которых управляются 6 сервомеханизмами. Для моделирования топливной системы требуется еще 6 сервомеханизмов. Счетно-решающие устройства для моделирования радиооборудования содержат 20 сервомеханизмов и 70 усилителей. Счетно-решающее устройство для моделирования работы электрической сети, автопилота, гидросистемы, оборудования шасси и других систем самолета содержит более 170 сервоприводов, 700 профилированных потенциометров, 300 ламповых усилителей.

Применение цифровых машин в тренажерах затруднено из-за большого количества вычислительных операций, с которыми приходится иметь дело в тренажере, и из-за малой продолжительности моделируемых процессов. Например, полный цикл вычислений для определения аэродинамических величин и параметров, характеризующих работу двигателя, радиосредств и других систем, при моделировании полета четырехмоторного реактивного бомбардировщика не должен превышать 0,5 сек.

Использование цифрового устройства затруднено также необходимостью применения преобразователей непрерывных данных в цифровые и наоборот.

Моделирование линейных элементов выполняется способом последовательного суммирования. Умножение производится на потенциометрах, движки которых поворачиваются сервомеханизмами, или при помощи пентодных умножителей. Для генерирования функций применяются профилированные потенциометры и электронные функциональные генераторы. Интегрирование на постоянном токе выполняется путем зарядки конденсатора или при помощи электромеханических интеграторов. Дифференцирование в счетно-решающих устройствах на постоянном токе выполняется при помощи цепи *RC*. Ю. И. Кириленко

4243. Кибернетика на железнодорожном транспорте. Авентин-Пала (La cibernética en los transportes ferroviarios. Aventin Palá A.), Rev. Cálculo automát. y cibernét., 1954, **3**, № 7, 3—13 (исп.)

Популярный очерк устройств сигнализации, централизации и блокировки, применяемых на железнодорожном транспорте. После краткого изложения принципов диспетчерской централизации разбирается часть схемы линейного кодового устройства. Затем рассматривается схема автоматической локомотивной сигнализации (индуктивная система) и рассказывается об автостопах и системах автоконтроля за действиями машиниста по снижению скорости с автоматической остановкой поезда в случае бездействия машиниста. Автор утверждает, что работа описанных устройств якобы представляет собой кибернетический процесс. Г. Н. Поваров

4244 П. Счетный прибор для расчета расхода горючего. Пасториус (Mileage calculator. Pastorius Ernest W.). Пат. США 2661900, кл. 235—74, 8.12.53

Счетный прибор с номограммой, позволяющий по пройденному расстоянию определить израсходованное горючее, а также пройденное расстояние на единицу топлива. И. А. Вильнер

См. также: 3578, 3999

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

А

Аббасов Н. Т. 4071
Азимов Б. А. 3831
Акинфиев А. С. 4017
Александров П. С. 3728
Алиева Ф. М. 4071
Альбер С. И. 3730
Амснзаде Ю. А. 3855
Аржаных И. С. 3853
Артемов Г. А. 4088
Афанасьев Н. Л. 3902
Ахиезер Н. И. 3826
Ахмедов К. Т. 3862

Б

Бабич В. М. 3828
Бархин Г. С. 3775
Белоусов В. Д. 3716
Бендукидзе А. Д. 3888
Берман Г. М. 3885 К
Биглов З. И. 3804
Болтянский В. 3732
Борчугова З. Г. 3563 Д
Брадистилов Г. 3900
Булгаков Н. Г. 3819 Д
Бурдин Н. К. 4006
Былов Б. Ф. 3814

В

Вайнберг М. М. 3917
Вальков К. И. 4024
Вальфиш А. З. 3619, 3620
Ван Ши-цян 3710
Варшамов Р. 3639
Векуа И. Н. 3854
Вигант Э. И. 3721
Виксель А. А. 4024
Виноградов А. И. 3652 Д
Волков Е. А. 4090
Волковыский Л. И. 3796 К

Г

Гахов Ф. Д. 3859
Гельфанд И. М. 3924
Гельфонд А. О. 3790
Георгиев Г. 3881 К, 3884 К
Глаголев А. А. 3882 К
Глаголева А. А. 3882 К
Глускин Л. М. 3693
Гнеденко Б. В. 3957, 3990
Головин О. Н. 3676
Гольдина Н. П. 3676
Гребенюк Д. Г. 4093
Гриншпун З. С. 3747

Д

Давыдов Н. А. 3761
Данелич И. А. 4082
Дацев А. Б. 3851, 3852
Демков Ю. Н. 3947
Дешевой Г. М. 4026
Джавадов М. А. 4071
Добрушин Р. Л. 3963, 3969
Дундученко Л. Е. 3768
Духовный М. А. 3760 Д

И

Иванов Ал. 3881 К
Иванов Н. А. 3916
Игнатьева Р. П. 3644, 3645
Иохвидов И. С. 3923

К

Кадец М. И. 3906
Какида 3978
Калик К. 3834 Д
Карапиколов Хр. 3881 К
Катков Г. Ф. 4049
Кац А. М. 3830
Киро С. Н. 3572
Киш О. 3762
Климов Н. И. 3649 Д
Ко Дя Ха 3865
Кононов В. А. 3811
Корицкий Г. В. 3789
Коробов Н. М. 3608
Коростелев Л. В. 4005
Коршунов Е. 4019
Костин А. В. 4086
Костюченко А. Г. 3924
Кравец 3583
Красносельский М. А. 3815, 3911, 3919
Крейн С. Г. 3815
Кулаков Н. Г. 3867 Д
Курош А. Г. 3706
Куртяков С. У. 3610, 3611
Кучин В. П. 3902

Л

Левин Б. В. 3651 Д
Левит Д. Е. 4113
Лидов М. Л. 3836
Лидский В. Б. 3813
Лісевич Л. М. 3821
Лихолетов И. И. 3576
Лось Г. 3596
Лукомская М. А. 3822

М

Майстров Л. Е. 3552
Маруашвили Т. И. 4109
Маутнер Ф. И. 3925
Медведев Ю. Т. 3607 Д
Мергелян С. Н. 3750, 3751, 3752, 3756
Мецховришвили Ш. 3863
Минквиц А. А. 3883 К
Минь Сы-хао 3798
Миракьян Г. М. 3572
Миронов В. Т. 3763
Мосеенков Б. И. 3805
Мчедлишвили Е. 4025
Мышкис А. Д. 3721

Н

Наймарк М. А. 3937
Наталевич В. К. 3823
Нейгауз М. Г. 3802
Несмеянов А. Н. 3541
Никитин И. И. 3876
Норкин С. Б. 3820 Д

О

Обухов А. М. 3980
Оганесян В. А. 3696
Очан Ю. С. 3744

П

Палувер Н. В. 4110
Панов Д. 3881 К
Пенков П. 3881 К
Петканчин Б. 4048
Петровић М. 4011
Петросян Г. Б. 3594 Д
Пинскер М. С. 3972
Плоткин Б. И. 3677
Погребысский И. Б. 4098
Поддерюгин В. Д. 3713
Полосуев А. М. 3609
Потоцкий В. В. 3650 Д
Путята В. И. 4114

Р

Радојчић М. 3779
Разумихин Б. С. 3809
Рогинский В. Н. 4125
Ростовцев Н. А. 3871
Рубаник В. П. 3806, 3849

С

Салехов Г. С. 3895
Самуэль О. И. 3868
Сарымсков Т. А. 3967
Саульев В. К. 4091
Сикорский Р. 3945
Симонов Н. И. 3573
Сираждинов С. Х. 3999
Скалкина М. А. 3812
Скорняков Л. А. 4073
Скородумов В. М. 4053 Д
Скороход А. В. 3953
Слободянский М. Г. 4095
Слугин С. Н. 4097
Соболев В. И. 3911
Соколов Ю. Д. 3829
Софронов И. Д. 3866 Д
Стесин И. М. 4094
Сукалло А. А. 3648 Д
Сухаревский И. В. 3870
Сэвулеску Т. 3544
Сюй Ли-чжи 3898

Т

Тайманов А. Д. 3726
Темко К. В. 3759 Д
Темляков А. А. 3784
Туганов Н. Г. 4052

У

Урбаник К. 3968
У Чжи-цюань 3898

Ф

Фиников С. П. 4002

Х

Хведелидзе Б. В. 3773
Хохлов Р. В. 3840
Христофоров В. В. 3869

Ц

Цай И. П. 4092
Цветков Цв. 3881 К

Ч

Чарин В. С. 4020 К
Чернишенко Е. А. 4096
Чжэн Цзэн-тун 3960
Чибрикова Л. И. 3859

Ш

Шварц Ш. 3692, 3694, 3695
Шидловский А. Б. 3616
Штраус А. В. 3803

Э

Эйдельнант М. И. 4000

Ю

Юнусов К. С. 4089
Юньков А. А. 3901
Юшкевич А. П. 3567

Я

Яновская С. А. 3576
Ярник В. 3543

A

Achijezer N. 3757 К
Adams B. L., 4115
Agins G. 4233 П
Afriat S. N. 3662
Akizuki Y. 4056
Andersson J. 3641
Antula J. 4197
Archibald R. C. 3574
Arens R. 3683
Arneodo C. 4170
Arsenin W. J. 3745 К
Artin E. 3679
Atiqullah M. 3987
Aventín Palá A. 4243

B

Babuška I. 4107
Bădescu R. 3860
Baer R. M. 3717
Balachandran V. K. 3723
Bambah R. P. 3630
Banaschewski B. 3722
Bang T. 3635
Barabaschi S. 4123, 4124
Barlotti A. 4014
Barot J. 3928
Barthel W. 4063
Baum W. R. 3737 К
Beers Y. 4118 К
Bellman R. 3961
Benner A. H. 3998
Berghuis J. 3795 К
Bergström H. 3959
Bers L. 3833 К
Berstein I. 3727
Bertotti B. 4067
Beyer H. 4209
Bierman K.-R. 3571
Biernacki M. 3877
Binet F. E. 3952
Bing R. H. 3724
Bizley M. T. L. 3654
Blackman J. 3896
Blanc-Lapierre A. J. L. 3979
Blaser J. 3889 К
Boldescu P. 4043
Booth A. D. 4150
Borsuk K. 3729
Boughon P. 4036
Bouligand G. 3586
Bouricius W. G. 4145
Braumann P. B. T. 3653
Bruck R. H. 4070
Burkhard F. 4106
Butler M. C. R. 3633
Butler R. R. 4211
Butson A. T. 3634

C

Caimann V. 4206
Calvi J. 4232 П
Cameron R. H. 3943
Carlitz L. 3636, 3637
Cassels J. W. S. 3626
Cattabriga L. 3824
Cavallaro V. G. 4012
Caywood W. P. 4126
Čech E. 4003
Chaléat R. 3837
Chung Kai Lai 3965, 3966
Cirillo E. 3787
Clark L. M. 4212
Cohen I. S. 3699
Cohn H. 3621, 3622
Cohen R. M. 4198
Collingwood E. F. 3770
Cossu A. 4061
Coxeter H. S. M. 4077
Cristescu R. 3915
Cuesta N. 3711
Curtiss J. H. 4105
Curzio M. 3668
Cutler A. E. 4241, 4242

D

David F. N. 3986
Davis B. E. 4185
Davis S. 4183
Deaux R. 4046
Delange H. 3874
Delerue P. 3899 К
Demaria D. C. 3698
Dengler M. 4100
Derwidué L. 3657, 4023
Descombes R. 3625
Deskins W. E. 3708
Dieudonné J. 3936
Dijksterhuis E. J. 3566
Dixon W. J. 3991
Dobrescu A. 4042
Donnelly J. B. 4203
Draper C. S. 3879 К
Dufresnoy J. 3614
Dulmage L. 4081

E

Early E. D. 4169
Eason G. 4099
Eberl W. 3964
Ebersold J. M. 3739 Д
Engel W. 3593
Epstein D. J. 4231 П
Evans R. L. 3800

F

Fan Ky 3661
Fantappiè L. 3926
Fehr H. F. 3556
Félix L. 3565
Ferrari I. 3857
Finkbeiner D. T. 3904
Finzel L. 3956
Floyd E. E. 3907
Follingstad H. G. 4195
Foote R. J. 3995
Foss F. A. 4132
Frame J. S. 4102
Freud G. 3748
Freudenthal H. 4213
Frucht R. 3675
Fuchs W. H. J. 3776
Fukamiya M. 3933
Fullerton R. E. 3912

G

Gandy R. O. 3605
Garnier R. 3767
Gatti E. 4123, 4124
Gauster W. F. 3894
Gauthier L. 4041
Gebelein H. 4116К, 4117 К
Geddes A. 3700
Gee B. D. 3742
Gerstenhaber M. 3718
Gheorghiev Gh. 4058
Gianuizzi M. 3864
Gilchrist B. 4152
Gillman L. 3929
Giunter N. M. 3560 К
Goddard L. S. 3659
Gonzalez del Valle A. 4122
Goodstein R. L. 3602
Goormaghtigh R. 4016
Gordon B. M. 4173
Graffi D. 3832 К
Grammel R. 3631
Greiff B. L. de 4013
Griffiths H. B. 3678
Gruenberg E. L. 4217
Guggenbühl W. 4202
Gurland J. 3985

H

Haantjes J. 4064
Hadwiger H. 3944
Hajek J. 3982
Halmos P. R. 3600, 3601
Hammersley J. M. 3714
Harish-Chandra 3939
Harr L. A. 4143
Hartman S. 3931, 3941
Hattori A. 3704
Hearon J. Z. 3848
Helson H. 3771, 3897
Hemmi D. 4079
Henriksen M. 3929
Herrero M. C. 3845
Hickerson T. F. 4009
Hilton P. J. 3733
Hlawka E. 3613
Hoffman A. J. 3661
Holecek K. 4208
Holman W. A. 4221 П
Honda K. 3667
Hopf E. 3825
Hopkins E. G. 4180
Horkins G. W. 4221 П
Hoppe W. 4206
Horie N. 4059, 4060
Hörmander L. 3905
Hornby H. 3975
Hosszu M. 3875
Hruša K. 3561 К
Huppert B. 3669
Huron R. 3958
Huzurbazar V. S. 3951
Hyman M. A. 3847

I

Imburgia C. A. 4238
Irani R. A. K. 3568
Irwin J. O. 3955
Iséki K. 3720

J

Jadraqué V. M. 3581
Jaffard P. 3709
Jaffe G. 3562 К
James R. D. 3746
Jenkins J. 3791, 3792
Johnson A. B. 4164
Johnson N. L. 3986
Jones B. W. 3624
Jost R. 3858

K

Kakutani S. 3781
Kalmár L. 3564
Kaplan W. 3766
Kárteszi F. 3582
Kauderer H. 3801
Kaufman H. 3846
Kawata T. 3973
Keller O. H. 3593
Kikuta T. 3927
Kilpi Y. 3949 К
Kimura T. 3799, 3807
Kirchhoff A. 3738 Д
Kirchmayer L. K. 4238
Kirsch R. A. 4146
Kitagawa T. 3993, 3994
Klee V. L. 3907, 3913
Klingen H. von 3783
Knight A. J. 4035
Kolibiarová B. 3580
Kopeć J. 3914
Kopp R. 4144
Köthe G. 3551

Krömer H. 4201
Kron A.-W. 4121 К
Krull W. 3670
Kulikowski R. 3841
Künzi H. P. 3589
Kurepa G. 3666
Kuroda T. 3780
Kuzmin R. O. 3560 К

L

Laugwitz D. 3908, 3909
Lavendhomme R. 3705
Lazard M. 3681
Lees S. 3879 К
Lelong P. 3786
Leptin H. 3687, 3731
Lietzmann W. 3735 К
Lilamand M. 4174
Litoff O. 3680
Ljapunow A. A. 3745 К
Loève M. 3962, 3981 К
Loonstra F. 3690
Lorch E. R. 3918
Lorenz P. 3996
Łoś J. 3596
Lutz E. 3646 К

M

Maaß H. 3785
Macbeath A. M. 3628
McCrea W. H. 4001
McDonald J. K. 4136
McDonnell J. A. 4167
Macintyre S. S. 3872
McKay W. 3879 К
Mahel V. 4031
Mahler K. 3623
Maier W. 4074
Markuschewitsch A.I. 3890К
Marmion A. 4029
Marsh D. 3624
Mašek V. 4030
Massot P. 4112
Matsushita Shin-ichi 3686
Maurer I. 3643, 3674
Mavridès S. 4066
Mayer J. 3579
Mead D. G. 3707
Mehring J. 3797 Д
Melone S. 3856
Mennessier H. L. 4015
Meredith B. 3998
Méric J. 3958
Meyer M. A. 4173
Mihăileanu N. 4027, 4045
Mikołajska Z. 3808
Milloux H. 3793 К
Misonou Y. 3933
Miyasawa K. 3992
Monna A. F. 3688
Morse M. 3791, 3792
Morton K. W. 3714
Moscovici M. 4008
Müller C. 3827
Müller H. 3818 Д
Mumma R. E. 4218 II
Muncy J. H. 4154
Muracchini L. 4034
Murnaghan F. D. 3671, 3673
Musielak J. 3914
Myller A. 4044
Myschkis A. D. 3816 К

N

Näbauer M. 3758 К
Nachbin L. 3910
Naday G. 4222 II
Nakano S. 4056
Nakayama T. 3702
Natucci A. 4010
Neese J. 4159
Nef W. 3944
Newman M. 3617
Ničе V. 4032
Nicola R. N. 4173
Nijenhuis A. 4062
Nikodým O. M. 3904
Ninot J. 3697
Noble B. 4099
Novak W. D. 4193

O

Ohgane M. 4069
Ohmann D. 3740
Okamoto M. 3664
Olson F. R. 3637, 3658
O'Neil S. J. 4189
Ostermann F. 3719 Д
Ōtsuki T. 4083
Ott J. A. 3647 К
Ou Tchen-Yang V. 3893

P

Paige L. J. 4072
Pajares E. 3577
Pallu de la Barrière R. 3950 К
Parodi M. 3655, 3873
Parry W. T. 3603
Pastorius E. W. 4244 II
Pentkowski M. W. 4120 К
Perfect H. 3665
Perron O. 3656
Péter R. 3587
Petersen J. 4021 К
Pipes L. A. 3839, 3842, 3843
Pirl U. 3861
Pisot C. 3614, 3615
Pitcher T. S. 3976
Poli L. 3899 К
Pollard H. 3755
Postley J. A. 4207
Powell F. C. 4007
Predonzan A. 4039
Pukánszky L. 3921
Purday H. F. P. 3880 К

Q

Quade W. 4085
Quine W. V. 3606
Quintas Castañs V. 3578

R

Rado T. 3736 К
Radon J. 4047
Rainich G. Y. 4004
Reenpää Y. 4055
Reichardt W. 3553
Reichelderfer P. V. 3736 К
Rellich F. 3922
Repossi G. 4161
Rieger G. J. 3612
Righi R. 4127, 4128, 4129, 4130
Ringham G. B. 4241
Rinow W. 3546, 4075
Robb J. C. 4210
Robbins H. 3844
Robertson J. M. 4205
Robinson G. de B. 3672
Rogers C. A. 3628
Rogers K 3630
Rokos P. 3712
Root W. L. 3976
Rosati M. 3777
Rosen P. 4087
Rosenberg A. 3701

S

Saaty T. L. 4076
Sack H. S. 4219 II
Saelman B. 3835
Sajovic L. 3555
Sakai S. 3940
Samelson H. 3682
Santalo L. A. 3627
Sasayama H. 4065
Sastry S. 3640
Saunders R. M. 4215
Sawyer D. B. 3629
Schmeidler W. 3592, 3948 К
Schmidt J. 3715
Schneider H. 3659, 3660
Schoeneberg B. 3618
Schöneborn H. 3684
Schrek D. J. E. 3585
Schroeder R. L. 4169
Schuler M. 4116К, 4117К
Severi F. 4040
Shaw F. S. 4119 К
Shimizu T. 3850
Shive J. N. 4195
Shively H. G. 4237
Shupe P. D. 4146
Sikkema P. C. 3817 К
Sikorski R. 3725, 3945
Sirao T. 3971
Smirnow W. I. 3886 К
Smith G. L. 4169
Smith N. 3743
Sneddon I. N. 4099
Špaček A. 3970
Spampinato N. 4037
Spencer D. C. 3734
Springer G. 3764
Stagg G. W. 4238
Standley G. B. 3604
Steele F. G. 4224 II
Stenberg W. 3887
Sternberg R. L. 3903
Stewart B. M. 3634
Stiening R. 4216
Stillman A. H. 4236
Stoka M. I. 4050
Stoker D. J. 3988, 3989
Stone J. J. Ir. 4223 II, 4230 II
Storchi E. 3642
Stout T. M. 4115
Stschegolkow E. A. 3745 К
Stueckelberg E. C. G. 4054
Süss W. 4078
Swift I. H. 4185
Szele T. 3703
Szökefalvi-Nagy B. 3920

T

Takahashi T. 3946
Takasu T. 4057
Takeda Z. 3933
Takeno H. 4068
Takenouchi O. 3938
Tarski A. 3597
Taulbee O. E. 3672
Taylor E. G. R. 3569
Taylor R. L. 3685
Thébault V. 4018
Thomas B. W. 4162
Tolstow G. P. 3891 К
Tomita M. 3934, 3935
Tricomi F. G. 3892
Trischka J. W. 4219 II
Tsuji M. 3769, 3778, 3788
Tsurumi S. 3942
Tsushima T. 4084
Tupper S. J. 4101
Turri T. 4033

U

Uchiyama S. 3632
Uno T. 3838
Urabe M. 3782, 4084
Urbanik K. 3932, 3968

V

Valiron G. 3794 К
Valpola V. 3595
Van Buskirk M. 4181
Vančura Z. 4051
Vaught R. L. 3598, 3599
Vesentini E. 4038
Vidav I. 3749, 3753, 3754
Viola T. 3741, 3878
Vivier M. 3663
Volterra V. 3559 К
Voss K. 4080
Vries D. de 4104
Vries Hk. de 3575
Vyšín J. 3557 К

W

Waadeland H. 3765
Wadel L. B. 4166
Wallace A. D. 3691
Walsh J. L. 3774
Walther A. 4121 К
Wanlass C. L. 4199
Ward M. 3638
Ważewski T. 4108
Wendel J. G. 3689
Weydanz W. 4111
Wexler C. 4072
Whittle P. 3974
Wielandt H. 4103
Williams C. R. 4147
Williamson D. T. N. 4234, 4235
Wise J. 3977
Wortham A. W. 4166

Y

Yaeger R. E. 4195
Yamashita C. 4022
Yano K. 4069
Yood B. 3930
Yoshizawa T. 3810
Young G. O. 4220 П

Z

Zeheb D. 4126
Zelinka R. 3557 К, 3558 К
Zemanek H. 4131, 4214.
Zia ud-Din M. 3983, 3984
Zin G. 3772
Zubrzycki S. 3954

ვალუაშვილი ა. 3619, 3620
მეცხოვრიშვილი შ. 3863

吳智泉 3898
垣田高夫 3978
徐利治 3898
王世強 3710
鄭曾同 3960
関嗣鶴 3798
高載河 3865

Технический редактор *В. В. Гражданкина*